Calculus I, **23/11/2015**

Reeksnr.:
Naam:

1. Beschouw de functie
$$f(x) = ax + b + \ln(e^{-2x} - 4)$$
met $a, b \in \mathbb{R}_0$.

   (a) Benoem het domein van de functie $f(x)$.

   (b) Bepaal a en b zodat de rechte $y = 2x - 1$ een schuine asymptoot is voor $f(x)$.

   (c) Voor $a = 4$ en $b = -1$, bespreek de grafiek van de functie $f(x)$, m.a.w. benoem alle asymptoten, alle (lokale of globale) extrema, en bespreek het functieverloop (dalend/stijgend, kritieke punten, buigpunten).

(2.5 ptn)

Antwoord:

(a) Het domein van de functie $f(t)$ wordt bepaald door alle waarden van x waarvoor de natuurlijke logaritme gedefinieerd is. Opdat $f(t)$ bestaat moet er aan de volgende voorwaarden voldaan zijn: $\ln(e^{-2x} - 4)$ moet gedefinieerd zijn; dit is voldaan voor $e^{-2x} - 4 > 0$, wat herschreven kan worden tot $x < \ln(\frac{1}{2})$. De andere termen in de functie hebben als domein $\mathbb{R}$. Hieruit volgt dat het domein van $f(t)$ is $\{x \in \mathbb{R} : x + \ln(2) < 0\}$, ofwel $x \in]-\infty, \ln\frac{1}{2}[$. *(0.5 ptn)*

(b) $y = \alpha x + \beta$ is een schuine asymptoot van een willekeurige functie $g(x)$ als

$$\lim_{x \to -\infty} (g(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$$

of

$$\lim_{x \to +\infty} (g(x) - (\alpha x + \beta)) = 0.$$

In ons specifieke geval ligt $x = \infty$ niet in het domein, dus kiezen we

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (2x - 1)) = 0$$

om a en b te bepalen:

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (2x - 1)] =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[ax + b + \ln(e^{-2x} - 4) - 2x + 1\right] =$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[(a-2)x + (b+1) + \ln(e^{-2x} - 4)\right] = 0.$$

Het argument van de natuurlijke logaritme moet nu enigszins herschreven worden om te voorkomen dat de exponent opblaast:

$$\lim_{x \to -\infty} \left[(a-2)x + (b+1) + \ln\left(e^{-2x}(-4e^{2x} + 1)\right)\right] = 0.$$

Waarna de logaritme gesplitst kan worden en we de somregel voor limieten kunnen toepassen,

$$\lim_{x \to -\infty} \left[(a-2)x + (b+1) + \ln\left(e^{-2x}\right) + \ln\left(-4e^{2x} + 1\right)\right] =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[(a-2)x+(b+1)-2x+\ln\left(-4e^{2x}+1\right)\right]=0.$$

We zien dat de laatste term

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(-4e^{2x}+1\right)\right]=\ln(1)=0.$$

en we krijgen:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[(a-4)x+(b+1)\right]=0.$$

Waaruit we concluderen dat $a=4$ en $b=-1$.
Alternatief: Los de volgende limieten op

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{ax+b+\ln\left(e^{2x}-4\right)}{x}\right]=2.$$

met L'Hopital en

$$\lim_{x\to-\infty}\left[4x+b+\ln\left(e^{2x}-4\right)\right]=-1.$$

om direct $a=4$ en $b=-1$ te vinden. *(1 ptn)*

(c) Voor $a=4$ en $b=-1$ vinden we $f(x)=4x-1+\ln\left(e^{-2x}-4\right)$ en we hadden al gevonden dat deze functie een schuine asymptoot $y=2x-1$ heeft.
We kijken nu of de functie nog een verticale of horizontale asymptoot heeft en we vinden

$$\lim_{x\to\gamma^-}(f(x))=-\infty$$

voor $e^{-2x}-4\to0^+$ en dus is $x=-\ln(2)$ een verticale asymptoot voor $f(x)$. We vinden geen horizontale asymptoot.
We bepalen nu het tekenverloop van $f(x)$. Hiervoor bepalen we de afgeleide en we stellen deze gelijk aan 0 om kritieke punten te bepalen:

$$\frac{df(x)}{dx}=4+\frac{2}{4e^{2x}-1}=0.$$

Waaruit we vinden dat $(\frac{-3\ln(2)}{2},-1-\ln(16))$ een kandidaat extremum is. We bepalen nu de tweede afgeleide van $f(x)$,

$$\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{-16e^{2x}}{(1-4e^{2x})^2}<0,$$

waaruit we concluderen dat we te maken hebben met een globaal maximum en dat er geen buigpunten zijn. Dit geeft de volgende tekentabel:

x		$\frac{-3\ln(2)}{2}$	
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$-$		$-$

(1 ptn)

2. Bereken het volume en de massa van het omwentelingslichaam dat je bekomt als volgt:

   (a) Neem de functie $g(x) = \sin^2\left(\frac{x}{3}\right)$. Bereken vervolgens de eerste twee (tellende vanaf de y-as) snijpunten in het eerste kwadrant van enerzijds de grafiek van g met anderzijds de horizontale rechte $y = 0.5$.

   (b) Wentel het stuk van de grafiek van g tussen die twee snijpunten rondom de as $y = 0.5$. Bereken vervolgens het volume.

   (c) Neem aan dat het omwentelingslichaam gevuld is met materiaal met dichtheid $\rho(x) = \lambda x$ met $\lambda = \frac{1}{\pi}$. Bepaal de massa van het lichaam. (Hint: gebruik de identiteit $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ twee keer.)

(2.5 ptn)

Antwoord:

(a) We zoeken snijpunten van $\sin^2\left(\frac{x}{3}\right) = 0.5$ in het eerste kwadrant $(x \geq 0, y \geq 0)$. We vinden uit

$$\sin^2(\frac{x}{3}) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2x}{3}\right)\right) = 0.5 \rightarrow \cos\left(\frac{2x}{3}\right) = 0$$

de eerste twee snijpunten $x_1 = \frac{3\pi}{4}$ en $x_2 = \frac{9\pi}{4}$

(0.5 ptn)

(b) Het volume van het omwentelingslichaam door omwenteling van deze figuur rond de $y = 0.5$ as is gelijk aan

$$V = \pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \left(\sin^2\left(\frac{x}{3}\right) - 0.5\right)^2 dx$$

Het makkelijkst is om nu direct de identiteit $\sin^2(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2x)\right)$ en de integraal

$$V = \pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \cos^4\left(\frac{2x}{3}\right) dx = \pi \frac{3}{64}\left(8x + 8\sin\left(\frac{4x}{3}\right) + \sin\left(\frac{8x}{3}\right)\right)\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}}$$

op te lossen via de standaardintegralen in het boek.
We zullen echter alle termen apart oplossen:

$$V = \pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \sin^4\left(\frac{x}{3}\right) dx + \pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \frac{1}{4} dx - \pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \sin^2\left(\frac{x}{3}\right) dx =$$

$$\pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \left(1 - \cos^2\left(\frac{x}{3}\right)\right)^2 dx + \frac{\pi}{4}x\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} - \pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2x}{3}\right)\right) dx =$$

$$\pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2x}{3}\right)\right)^2 dx + \frac{\pi}{4}\left(\frac{9\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{2}x\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} + \frac{3\pi}{4}\sin\left(\frac{2x}{3}\right)\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} =$$

$$\pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{1}{4}\cos^2\left(\frac{2x}{3}\right)\right) dx + \frac{3\pi^2}{8} - \frac{3\pi^2}{4} - \frac{3\pi}{2} =$$

$$\pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{1}{8}\cos\left(\frac{4x}{3}\right) + \frac{1}{8}\right) dx - \frac{3\pi^2}{8} - \frac{3\pi}{2} =$$

$$\pi\frac{3}{8}x\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} - \pi\frac{3}{4}\sin\left(\frac{2x}{3}\right)\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} + \pi\frac{3}{32}\sin\left(\frac{4x}{3}\right)\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} - \frac{3\pi^2}{8} - \frac{3\pi}{2} =$$

$$\frac{9\pi^2}{16} + \frac{3\pi}{2} + 0 - \frac{3\pi^2}{8} - \frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi^2}{16}$$

Alternatief: gebruik de identiteit $\sin^4(x) = \frac{3-4\cos(2x)+\cos(4x)}{8}$ direct, of maak gebruik van de standaardintegralen uit het boek.

(1 ptn)

(c) De massa van het lichaam wordt gegeven door

$$m = \pi \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \lambda x \left(\sin^2\left(\frac{x}{3}\right) - 0.5\right)^2 dx =$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} x\sin^4\left(\frac{x}{3}\right) dx + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \frac{x}{4} dx - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} x\sin^2\left(\frac{x}{3}\right) dx = I_1 + I_2 + I_3.$$

We bepalen nu de integralen afzonderlijk om het overzichtelijk te houden. We maken gebruik van de resultaten uit $2(b)$, waar we vonden dat $\sin^4(x) = \frac{3-4\cos(2x)+\cos(4x)}{8}$.

$$I_1 = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} x\sin^4\left(\frac{x}{3}\right) dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} x\frac{3 - 4\cos\left(\frac{2x}{3}\right) + \cos\left(\frac{4x}{3}\right)}{8} dx =$$

$$\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \frac{3x}{8} dx - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \frac{4x}{8}\cos\left(\frac{2x}{3}\right) dx + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \frac{x}{8}\cos\left(\frac{4x}{3}\right) dx =$$

Nu kunnen we partiele integratie toepassen, waarbij we kiezen

$$U = x; dV = \cos\left(\frac{2x}{3}\right) dx$$

$$dU = dx; V = \frac{3}{2}\sin\left(\frac{2x}{3}\right)$$

en

$$U = x; dV = \cos\left(\frac{4x}{3}\right) dx$$

$$dU = dx; V = \frac{3}{4}\sin\left(\frac{4x}{3}\right)$$

voor de tweede en derde term in I_1 respectievelijk. Nu vinden we

$$I_1 = \frac{3x^2}{16}\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} - \frac{3}{4}x\sin\left(\frac{2x}{3}\right)\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \frac{3}{4}\sin\left(\frac{2x}{3}\right) dx + \frac{3}{32}x\sin\left(\frac{4x}{3}\right)\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \frac{3}{32}\sin\left(\frac{4x}{3}\right) dx =$$

$$I_1 = \frac{3x^2}{16}\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} - \frac{3}{4}x\sin\left(\frac{2x}{3}\right)\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} - \frac{9}{8}\cos\left(\frac{2x}{3}\right)\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} + \frac{3}{32}x\sin\left(\frac{4x}{3}\right)\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} + \frac{9}{128}\cos\left(\frac{4x}{3}\right)\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} =$$

$$\frac{9}{32}\pi(8+3\pi).$$

Vervolgens bepalen we de tweede integraal

$$I_2 = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \frac{x}{4}dx = \frac{x^2}{8}\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} = \frac{9\pi^2}{16}.$$

En de derde integraal

$$I_3 = -\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} x\sin^2\left(\frac{x}{3}\right)dx.$$

Wederom kunnen we de identiteit $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ gebruiken en partiele integratie toepassen:

$$I_3 = -\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2x}{3}\right)\right)dx =$$

$$-\frac{x^2}{4}\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \frac{1}{2}x\cos\left(\frac{2x}{3}\right)dx =$$

$$-\frac{x^2}{4}\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} + \frac{3}{4}x\sin\left(\frac{2x}{3}\right)\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} - \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} \frac{3}{4}\sin\left(\frac{2x}{3}\right)dx =$$

$$-\frac{x^2}{4}\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} + \frac{3}{4}x\sin\left(\frac{2x}{3}\right)\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} + \frac{9}{8}\cos\left(\frac{2x}{3}\right)\Bigg|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{9\pi}{4}} =$$

$$-\frac{9}{8}\pi(2+\pi).$$

En we vinden

$$m = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{9}{32}\pi(8+3\pi) + \frac{9\pi^2}{16} - \frac{9}{8}\pi(2+\pi) = \frac{9\pi^2}{32}$$

Puntenverdeling:

Vraag 1

Correct beargumenteren van het domein: 0.5 pt

Benoemen limiet om de schuine asymptoot te vinden: 0.25 pt

Berekenen van limiet 1(b) en a en b vinden: 0.75 pt

Schuine asymptoot benoemen, mits niet gevonden bij 1(b): 0.25 pt

Verticale asymptoot benoemen: 0.25 pt

Globaal extremum: 0.25 pt

Tekenverloop $f(t)$: 0.25 pt

Vraag 2

Snijpunten vinden: 0.5 pt

Correcte integraal opstellen voor volume: 0.5 pt

Volume berekenen: 0.5 pt

Correcte integraal opstellen voor massa: 0.5 pt

Massa berekenen: 0.5 pt

Veelgemaakte fouten
Vraag 1

1(a): Er wordt niet gerealiseerd dat $0 > \ln(1/2) > -\infty$

1(b): De limiet wordt verkeerd gekozen, doordat het domein niet goed bepaald is.

1(c): De asymptoten worden vergeten. Er wordt niet gekeken waar de functie stijgend en dalend is, waardoor dit verwisseld wordt en de functie een globaal minimum heeft in plaats van een maximum.

Vraag 2

2(a): De snijpunten worden gevonden, maar vaak niet de eerste twee snijpunten in het eerste kwadrant

2(b): De 0.5 wordt vergeten in de integraal, waardoor er niet gewenteld wordt om $y = 0.5$ en het verkeerde volume wordt gevonden.

2(c): Het volume wordt constant genomen uit 2(b), of de 0.5 wordt wederom vergeten.