KU Leuven, bachelor wiskunde

Algebra II – 10 juni 2016

Belangrijke opmerking. Leg je antwoorden zorgvuldig uit. Geef duidelijk aan welke resultaten uit de cursustekst je gebruikt en geef een precieze referentie.

Opgave 1. Zij L het deelveld van het veld $\mathbb{R}$ gedefiniëerd door

$$L = \mathbb{Q}(\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}}).$$

a. Bepaal de minimale veelterm $p \in \mathbb{Q}[x]$ van de primitieve voortbrenger van L over $\mathbb{Q}$.
b. Bewijs dat $[L : \mathbb{Q}] = 4$.
c. Bewijs dat L het veld $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ bevat.
d. Ontbind p in $K[x]$ in irreducibele factoren.

Zij M/L het ontbindingsveld van p over L.

e. Bewijs dat $[M : L] = 2$.
f. Bewijs dat de velduitbreiding $M/\mathbb{Q}$ Galois is, en dat zijn Galois groep isomorf is met de diëder groep D_4 van orde 8.

Opgave 2. Zij E een veld en G een eindige groep automorfismen van E. Stel dat voor elk element $\sigma \in G$ een element $x_\sigma \in E \setminus \{0\}$ gegeven is zodanig dat

$$x_{\tau\sigma} = x_\tau \tau(x_\sigma)$$

voor alle $\sigma, \tau \in G$. Bewijs dat er een $\alpha \in E \setminus \{0\}$ bestaat met de eigenschap dat

$$x_\tau = \frac{\alpha}{\tau(\alpha)}$$

voor alle $\tau \in G$. (Aanwijzing: gebruik Dedekind's Lemma om te bewijzen dat er een $\beta \in E$ bestaat zodat $\sum_{\sigma \in G} x_\sigma \sigma(\beta) \neq 0$.)

Opgave 3. Zij G een groep van orde 35. Zij X een verzameling met 19 elementen. Neem aan dat een links actie van G op X gegeven is voor welke geen enkel element van X een vast punt is. Hoeveel orbieten bevat X?

Opgave 4. Zij p en q twee verschillende priemgetallen, met $p < q$. We nemen aan dat $q \equiv 1 \bmod p$. We tonen aan dat er precies twee groepen van orde pq zijn, op isomorfisme na.

a. Zij $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/(q-1))$ de verzameling van alle morfismes van groepen van $\mathbb{Z}/p$ naar $\mathbb{Z}/(q-1)$. Zij $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p)$ de groep van alle automorfismes van $\mathbb{Z}/p$ in zichzelf. Voor $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/(q-1))$ en $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p)$, definiëer $\alpha \cdot \sigma = \alpha \circ \sigma$. Bewijs dat $\cdot$ een rechts actie is van de groep $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p)$ op de verzameling $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}(q-1))$.
b. Bewijs dat de bovengenoemde actie precies twee orbieten heeft.

c. Zij H en N groepen en zij $\alpha\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ een actie van H op N via groepsmorfismen. Zij verder σ een automorfisme van H. Bewijs dat de semi-directe producten

$$N \rtimes_\alpha H \quad \text{en} \quad N \rtimes_{\alpha\circ\sigma} H$$

isomorf zijn.

Zij G nu een groep van orde pq.

d. Bewijs dat G een normaaldeler N bevat van orde q.
e. Bewijs dat G een deelgroep bevat van orde p.

Voor $n \in N$ en $h \in H$, definiëer $h \cdot n = hnh^{-1}$.

f. Bewijs dat $\cdot$ een links actie is van H op N is door groepsmorfismen.
g. Bewijs dat G isomorf is met een semi-direct product $N \rtimes_\alpha H$ voor een zekere actie α van H op N door groepsmorfismen.
h. Concludeer dat er op isomorfisme na precies twee groepen zijn van orde pq.

Opgave 5. Zij G een eindige groep en zij p een priemgetal. Zij S een p-Sylow deelgroep van G.

a. Zij $N_G(S)$ de normalizator van S in G. Zij H een normale deelgroep van G die S bevat. Bewijs dat $G = HN_G(S)$. (Aanwijzing: gSg^{-1} is een p-Sylow deelgroep van H, voor alle $g \in G$.)

Zij Z nog het centrum van G, en neem aan dat het quotiënt G/Z abels is.

b. Bewijs dat ZS een normaaldeler is in G.
c. Bewijs dat S een normaaldeler is in G.
d. Bewijs dat G isomorf is met het product van zijn niet-triviale Sylow deelgroepen.

Puntenverdeling:

Opgave 1	7
Opgave 2	3
Opgave 3	2
Opgave 4	5
Opgave 5	3