KU Leuven, bachelor wiskunde

Algebra II – 10 juni 2016 – uitwerking

Opgave 1. a. Zij α de primitieve voortbrenger van L. Dans is $\alpha^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, en dus is

$$(\alpha^2 - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{5}{4}.$$

Daaruit volgt dat $\alpha^4 - \alpha^2 - 1 = 0$. Zij dus

$$p = x^4 - x^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x].$$

Dan hebben we $p(\alpha) = 0$ **(1 pt)**. We moeten aantonen dat p irreducibel is, om te bewijzen dat p de minimale veelterm is van α over $\mathbb{Q}$.

Gebruik makend van het Lemma van Gauss, is het voldoende om aan te tonen dat $\bar{p}$ irreducibel in $\mathbb{Z}/3[x]$ is. Omdat $\deg(\bar{p}) = 4$, is het voldoende te bewijzen dat $\bar{p}$ niet deelbaar is door een irreducibele monische veelterm in $\mathbb{Z}/3[x]$ van graad 1 of 2. Omdat

$$\bar{p}(0) = \bar{p}(1) = \bar{p}(-1) = -1 \neq 0,$$

is $\bar{p}$ niet deelbaar door een irreducibele veelterm in $\mathbb{Z}/3[x]$ van graad 1.

We bepalen nu de irreducibele monische veeltermen van $\mathbb{Z}/3[x]$ van graad 2. Dat doen we door eerst de reducibele monische op te schrijven:

$$\begin{aligned} x^2 & \\ x(x-1) &= x^2 - x \\ x(x+1) &= x^2 + x \\ (x-1)^2 &= x^2 + x + 1 \\ (x-1)(x+1) &= x^2 - 1 \\ (x+1)^2 &= x^2 - x + 1. \end{aligned}$$

De irreducibele monische veeltermen van graad 2 zijn dus de 3 overblijvende:

$$q_1 = x^2 + 1,\ q_2 = x^2 + x - 1,\ q_3 = x^2 - x - 1.$$

Het beeld van $\bar{p}$ in $\mathbb{Z}/3[x]/(q_1)$ is $(-1)^2 - (-1) - 1 = 1 \neq 0$, dus is $\bar{p}$ niet deelbaar door q_1. Het beeld van $\bar{p}$ in $\mathbb{Z}/3[x]/(q_2)$ is $(-x+1)^2 - (-x+1) - 1 = x^2 + x + 1 + x + 1 = x \neq 0$, dus is $\bar{p}$ niet deelbaar door q_2. Het beeld van $\bar{p}$ in $\mathbb{Z}/3[x]/(q_3)$ is $(x-1)^2 - (x-1) - 1 = x^2 + x + 1 - x = x \neq 0$, dus is $\bar{p}$ niet deelbaar door q_3. Dit bewijst dat $\bar{p}$ irreducibel is in $\mathbb{Z}/3[x]$, en daarmee is $p \in \mathbb{Q}[x]$ irreducibel **(1 pt)**.

b. Omdat p de minimale veelterm is van α, hebben we $[L : \mathbb{Q}] = \deg(p) = 4$ **(0,5 pt)**.

c. Omdat $\alpha^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, hebben we $\sqrt{5} = 2\alpha^2 - 1 \in L$. Daarmee is ook $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subseteq L$ **(0,5 pt)**.

d. In $K[x]$ hebben we

$$p = x^4 - x^2 - 1 = (x^2 - \tfrac{1}{2})^2 - (\tfrac{\sqrt{5}}{2})^2 = (x^2 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{5}}{2})(x^2 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{5}}{2}).$$

Het zal nuttig blijken deze twee factoren van p in $K[x]$ een naam te geven: de eerste noemen we q, de tweede r. Beide veeltermen q en r zijn irreducibel in $K[x]$. Bewijs uit het ongerijmde: Neem aan dat een van beiden reducibel is. Dan heeft hij een wortel β in K. Dan heeft p ook een wortel β in K. De minimale veelterm van β over $\mathbb{Q}$ heeft graad $\leq [K:\mathbb{Q}] = 2$ en deelt p in $\mathbb{Q}[x]$. Tegenspraak want p is irreducibel in $\mathbb{Q}[x]$ volgens vraag a. Dus zijn beide factoren irreducibel in $K[x]$ **(1 pt)**.

e. De eerste factor q van de ontbinding van p in $K[x]$ ontbindt als $(x-\alpha)(x+\alpha)$ in $L[x]$. De tweede factor r is irreducibel in $L[x]$ want $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} > 0$, zodat hij zelfs geen wortels heeft in $\mathbb{R}$, dus zeer zeker niet in $L \subseteq \mathbb{R}$. Het ontbindingsveld M van p over L is dus $L(\beta)$, waar

$$\beta = \sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{5}}{2}}.$$

Omdat r de minimale veelterm is van β over L, hebben we

$$[M:L] = \deg(r) = 2 \quad \textbf{(1 pt)}.$$

f. De uitbreiding $M/\mathbb{Q}$ is normaal als ontbindingsveld over $\mathbb{Q}$. Omdat het karakteristiek van $\mathbb{Q}$ gelijk is aan 0, is $M/\mathbb{Q}$ dus Galois. De wortels van p in M zijn $\pm\alpha, \pm\beta$, en M wordt voortgebracht als velduitbreiding over $\mathbb{Q}$ door deze wortels. Daarom is het restrictie morfisme

$$\rho\colon \mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q}) \to S(\{\pm\alpha, \pm\beta\})$$

injectief. We bewijzen dat het beeld van ρ de diëder deelgroep D_4 van de permutatiegroep $S(\{\pm\alpha, \pm\beta\})$ is, die overeenkomt met de symetrieën van het vierkant V waarvan de hoekpunten $\alpha, \beta, -\alpha, -\beta$ geëtiketteerd zijn.

Omdat M/L graad 2 heeft, is er een automorfisme τ van M/L zodat $\tau(\beta) = -\beta$ en $\tau_{|L} = \mathrm{id}$. De permutatie $t = \rho(\tau)$ is dus de spiegeling van V in de diagonaal $\alpha, -\alpha$. Omdat $K/\mathbb{Q}$ graad 2 heeft, is er een automorfisme φ van $K/\mathbb{Q}$ met $\varphi(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$. Merk op dat $q^{\varphi} = r$. Omdat $K(\alpha)$ het ontbindingsveld van q over K is, en $K(\beta)$ het ontbindingsveld van r over K is, bestaat er een isomorfisme ψ van $K(\alpha)$ naar $K(\beta)$ met $\psi(\alpha) = \beta$ en $\psi_{|K} = \varphi$. Omdat M het ontbindingsveld van r over $K(\alpha)$ is, en ook dat van $q = r^{\psi}$ over $K(\beta)$, bestaat er een automorfisme σ van M met $\sigma(\beta) = -\alpha$ en $\sigma_{|K(\alpha)} = \psi$. We hebben dan een automorfisme σ van $M/\mathbb{Q}$ met $\sigma(\alpha) = \beta$ en $\sigma(\beta) = -\alpha$. Dan is ook $\sigma(-\alpha) = -\beta$ en $\sigma(-\beta) = \alpha$. De permutatie $s = \rho(\sigma)$ is dus de rotatie van V om z'n middelpunt met hoek $\pi/2$. De elementen s en t van $S(\{\pm\alpha, \pm\beta\})$ brengen de diëder groep D_4 van het vierkant $\alpha, \beta, -\alpha, -\beta$ voort. Het volgt dat ρ een isomorfisme is van $\mathrm{Gal}(M/\mathbb{Q})$ naar D_4 **(2 pt)**.

Opgave 2. Dedekind's Lemma impliceert dat de familie automorfismen G in $\mathrm{Hom}(E,E)$ lineair onafhankelijk is over E. Omdat $x_{\mathrm{id}} \neq 0$, is de lineaire combinatie $\sum_{\sigma\in G} x_\sigma \sigma$ niet gelijk aan 0 in $\mathrm{Hom}(E,E)$. Er bestaat dus een $\beta \in E \setminus \{0\}$ zodat

$$\alpha = \sum_{\sigma\in G} x_\sigma \sigma(\beta) \neq 0 \quad \textbf{(1 pt)}.$$

We hebben dan, voor $\tau \in G$,

$$x_\tau \tau(\alpha) = x_\tau \sum_{\sigma \in G} \tau(x_\sigma)\tau(\sigma(\beta)) =$$

$$\sum_{\sigma \in G} x_\tau \tau(x_\sigma)(\tau\sigma)(\beta) = \sum_{\sigma \in G} x_{\tau\sigma}(\tau\sigma)(\beta) = \alpha \quad \textbf{(2 pt)}$$

want $x_\tau \tau(x_\sigma) = x_{\tau\sigma}$. Omdat $\tau(\alpha) \neq 0$, volgt dat

$$x_\tau = \frac{\alpha}{\tau(\alpha)}$$

voor iedere $\tau \in G$.

Opgave 3. We weten dat het kardinaalgetal van een orbiet van X de orde van de groep G deelt, dus hebben de orbieten 1, 5, 7 of 35 elementen. Omdat X geen vaste punten heeft, zijn orbieten met slechts 1 element uitgesloten. Omdat X 19 elementen bevat en $19 < 35$, zijn orbieten met 35 elementen eveneens uitgesloten. Daarom bevat X alleen maar orbieten van 5 of 7 elementen **(1 pt)**. Zij a het aantal orbieten van 5 elementen en b het aantal orbieten van 7 elementen. Omdat X de disjuncte vereniging is van zijn orbieten, hebben we $a \cdot 5 + b \cdot 7 = 19$. Reduceren modulo 7 geeft $a \equiv 1 \bmod 7$. Omdat $0 \leq a < 4$, hebben we dus $a = 1$, en dan is $b = 2$. Het aantal orbieten is dus gelijk aan $a + b = 1 + 2 = 3$ **(1 pt)**.

Opgave 4. a. Als σ en τ twee elementen zijn van de groep $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p)$, dan hebben we

$$(\alpha \cdot \sigma) \cdot \tau = (\alpha \circ \sigma) \circ \tau = \alpha \circ (\sigma \circ \tau) = \alpha \cdot (\sigma\tau),$$

voor all $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/(q-1))$. Bovendien hebben we nog $\alpha \cdot \mathrm{id} = \alpha \circ \mathrm{id} = \alpha$, dus is $\cdot$ inderdaad een rechts actie **(0,25 pt)**.

b. Omdat $p|q-1$ is er een natuurlijk getal d zodat $dp = q - 1$. Zij $d\mathbb{Z}/(q-1)$ de deelgroep van $\mathbb{Z}/(q-1)$ voortgebracht door d. De groep $d\mathbb{Z}/(q-1)$ is cyclisch van orde p. Zij

$$\varphi \colon \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}(q-1)) \to d\mathbb{Z}/(q-1)$$

de afbeelding definiëerd door $\varphi(\alpha) = \alpha(1)$. Merk op dat $\alpha(1)$ inderdaad tot $d\mathbb{Z}/(q-1)$ behoort, daar $p\alpha(1) = \alpha(p) = \alpha(0) = 0$. Omdat 1 een voortbrenger is van $\mathbb{Z}/p$ is de afbeelding φ injectief. Omdat voor elke $x \in d\mathbb{Z}/(q-1)$, men $px = 0$ heeft, is er een morfisme van groepen α van $\mathbb{Z}/p$ naar $\mathbb{Z}/(q-1)$ met $\alpha(1) = x$. De afbeelding φ is dus ook surjectief. Omdat $(\alpha + \beta)(1) = \alpha(1) + \beta(1)$ is φ een morfisme van groepen. De afbeelding φ is dus een isomorfisme van groepen.

Op dezelfde manier bewijst men dat de afbeelding

$$\psi \colon \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p) \to (\mathbb{Z}/p)^\times,$$

gedefiniëerd door $\psi(\sigma) = \sigma(1)$, een isomorfisme van groepen is. Inderdaad is $\sigma(1) \neq 0$ in $\mathbb{Z}/p$ anders zou σ het triviale morfisme zijn van $\mathbb{Z}/p$ in zichzelf. Dus is de afbeelding ψ goed gedefiniëerd. De afbeelding ψ is injectief omdat 1 een voortbrenger is van $\mathbb{Z}/p$. de afbeelding ψ is surjectief omdat voor elke $x \in \mathbb{Z}/p$, met $x \neq 0$, er een morfisme van groepen σ is van $\mathbb{Z}/p$ in zichzelf met $\sigma(1) = x$. Omdat $x \neq 0$

en p priem is, is x een voortbrenger van $\mathbb{Z}/p$. Het volgt dat σ surjectief, en dan ook bijectief is. Daarmee is ψ inderdaad bijectief. Nu gaan we nog na dat ψ een morfisme van groepen is. Voor $\sigma, \tau \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p)$ hebben we

$$\psi(\sigma\tau) = (\sigma \circ \tau)(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(1 \cdot \tau(1)) = \sigma(1) \cdot \tau(1) = \psi(\sigma)\psi(\tau).$$

Daarmee is ψ inderdaad een morfisme van groepen. Dus is ψ een isomorfisme.

Merk nu op dat de rechts actie van $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p)$ op $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/(q-1))$ correspondeert met de rechts actie van $(\mathbb{Z}/p)^\times$ op $\mathbb{Z}/p$ door te vermenigvuldigen. Inderdaad, als $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/(q-1))$ en $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p)$, dan hebben we

$$\varphi(\alpha \cdot \sigma) = (\alpha \circ \sigma)(1) = \alpha(\sigma(1)) = \alpha(1 \cdot \sigma(1)) = \alpha(1) \cdot \sigma(1) = \varphi(1)\psi(1).$$

Dus heeft $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/(q-1))$ net zoveel banen onder de actie van $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p)$ als $\mathbb{Z}/p$ heeft onder de actie van $(\mathbb{Z}/p)^\times$. Die laatste actie heeft natuurlijk precies twee banen omdat $\mathbb{Z}/p$ een veld is, namelijk de deelverzamelingen $\{0\}$ en $(\mathbb{Z}/p) \setminus \{0\}$ van $\mathbb{Z}/p$. Dit bewijst dat $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/(q-1))$ precies twee banen heeft **(1 pt)**.

c. Zij

$$f_\sigma \colon N \rtimes_\alpha H \to N \rtimes_{\alpha\circ\sigma} H$$

de afbeelding gedefiniëerd door

$$f_\sigma(n, h) = (n, \sigma^{-1}(h)).$$

Laten we nagaan dat f_σ een morfisme van groepen is:

$$\begin{aligned} f_\sigma((m,g)(n,h)) = f_\sigma(m\alpha(g)(n), gh) = (m\alpha(g)(n), \sigma^{-1}(gh)) = \\ (m\alpha(g)(n), \sigma^{-1}(g)\sigma^{-1}(h)) = (m\alpha(\sigma(\sigma^{-1}(g)))(n), \sigma^{-1}(g)\sigma^{-1}(h)) = \\ (m, \sigma^{-1}(g))(n, \sigma^{-1}(h)) = f_\sigma(m,g) f_\sigma(n,h), \end{aligned}$$

voor alle $(m,g), (n,h) \in N \rtimes_\alpha H$. Merk op dat bovendien $f_{\sigma\tau} = f_\tau \circ f_\sigma$. Inderdaad,

$$\begin{aligned} f_{\sigma\tau}(n,h) = (n, (\sigma\circ\tau)^{-1}(h)) = (n, \tau^{-1}(\sigma^{-1}(h))) = \\ f_\tau(n, \sigma^{-1}(h)) = f_\tau(f_\sigma(n,h)) = (f_\tau \circ f_\sigma)(n,h) \end{aligned}$$

voor all $(n,h) \in N \times H$. Dus hebben we ook

$$f_\sigma \circ f_{\sigma^{-1}} = f_{\sigma^{-1}\sigma} = f_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$$

en dat ook nog eens met σ^{-1} in plaats van σ. Het volgt dat f_σ een isomorphisme is **(1 pt)**.

d. Het aantal q-Sylow deelgroepen van G is $\equiv 1 \bmod q$ en deelt p. Omdat p priem is, zijn 1 en p de enige delers van p. Omdat $1 < p < q$, is $p \not\equiv 1 \bmod q$. Daarom is er maar één q-Sylow deelgroep. Deze is dus noodzakelijkerwijs een normaaldeler in G, en is van orde q **(0,25 pt)**.

e. De groep G bevat op z'n minst één p-Sylow deelgroep. Deze is van orde p **(0,25 pt)**.

f. Beschouw de links actie van G op zichzelf door conjugatie. Dit is een actie van G op zichzelf door groepsmorfismen. Omdat $N \subseteq G$ een normaaldeler is, is N een

stabiele deelverzameling van G voor de actie in kwestie. De verkregen links actie van G op N kunnen we nu beperken tot de deelgroep H van G. De resulterende links actie van H op N is natuurlijk gegeven door $h \cdot n = hnh^{-1}$. Dit bewijst dat $\cdot$ een links actie is van H op N door groepsmorfismen **(0,25 pt)**.

g. Laat $\alpha\colon H \to \mathrm{Aut}(N)$ het morfisme van groepen zijn dat geassocieerd is aan de actie $\cdot$, d.w.z.

$$\alpha(h)(n) = hnh^{-1}$$

voor alle $n \in N$, en voor alle $h \in H$. Zij

$$\varphi\colon N \rtimes_\alpha H \to G$$

de afbeelding gedefiniëerd door

$$\varphi(n,h) = nh.$$

Laten we nagaan dat φ een morfisme van groepen is:

$$\varphi((m,g)(n,h)) = \varphi(m\alpha(g)(n), gh) = (mgng^{-1}, gh) = \\ mgng^{-1}gh = mgnh = \varphi(m,g)\varphi(n,h)$$

voor alle $(m,g),(n,h) \in N \rtimes_\alpha H$. Dus is φ inderdaad een morfisme van groepen. Omdat p en q relatief priem zijn is $N \cap H$ triviaal in G. Dus is φ injectief. Omdat $N \times H$ en G hetzelfde kardinaalgetal hebben, is φ dus een bijectie. We hebben bewezen dat φ een isomorfisme is van groepen **(1 pt)**.

h. Zij G_0 de productgroep $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/q$. Zij α een isomorfisme van $\mathbb{Z}/p$ naar de deelgroep $d\mathbb{Z}/(q-1)$ van $\mathbb{Z}/(q-1)$. Identificeren we $\mathbb{Z}/(q-1)$ met $(\mathbb{Z}/q)^\times$, of nog met $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/q)$, dan hebben we dus een niet-triviaal semi-direct product

$$G_1 = \mathbb{Z}/q \rtimes_\alpha \mathbb{Z}/p.$$

Niet-triviaal betekent hier dat de actie α van $\mathbb{Z}/p$ op $\mathbb{Z}/q$ door groepsmorfismen een niet-triviale actie is. In het bijzonder is G_1 niet commutatief. De groepen G_0 en G_1 zijn dus twee niet-isomorfe groepen van orde pq **(0,5 pt)**.

We bewijzen dat een willekeurige groep G van orde pq isomorf is met G_0 of G_1. Vanwege vraag g is G isomorf met een semi-direct product $\mathbb{Z}/q \rtimes_\beta \mathbb{Z}/p$, voor een zeker morfisme van groepen $\beta\colon \mathbb{Z}/p \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/q)$. Dan komt β dus overeen met een morfisme van groepen van $\mathbb{Z}/p$ naar $\mathbb{Z}/(q-1)$. Volgens vraag b behoort β dan tot de baan van α of tot de baan van het triviale morfisme 0. Volgens vraag c is G dan isomorf met G_0 of G_1 **(0,5 pt)**.

Opgave 5. a. De p-Sylow deelgroep S van G is natuurlijk in het bijzonder een p-Sylow deelgroep van H. Omdat $gSg^{-1} \subseteq gHg^{-1} = H$, is gSg^{-1} weer een p-Sylow deelgroep van H. Omdat alle p-Sylow deelgroepen van H geconjugeerd zijn in H, bestaat er een $h \in H$ zodat $gSg^{-1} = hSh^{-1}$. Dan is $(h^{-1}g)S(h^{-1}g)^{-1} = S$, d.w.z. $h^{-1}g \in N_G(S)$, en dus $g \in hN_G(S)$. Dit bewijst dat $G \subseteq HN_G(S)$ **(0,5 pt)**.

b. Zij $\pi\colon G \to G/Z$ het quotiënt morfisme. Omdat G/Z abels is, is de deelgroep $\pi(S)$ van G/Z een normaaldeler. Dan is $\pi^{-1}(\pi(S)) = ZS$ een normaaldeler in G **(0,5 pt)**.

c. Vanwege b is ZS een normaaldeler in G die S bevat. Vanwege a hebben we dus $ZSN_G(S) = G$. Maar Z en S zijn deelgroepen van $N_G(S)$. Dus is $G = ZSN_G(S) = N_G(S)$, d.w.z. S is normaal in G **(0,5 pt)**.

d. We bewijzen de bewering met inductie naar het aantal priemfactoren van $\#G$. Zij $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ de verzameling priemfactoren van $\#G$. Als $n = 0$ dan is $G = \{1\}$ en is de bewering trivialerwijze waar. Neem dus aan dat de bewering waar is voor alle eindige groepen waarvoor het aantal priemfactoren van de orde kleiner is dan n. Zij S_i een p_i-Sylow deelgroep van G, voor elke $i = 1, \ldots, n$. Vanwege vraag c, is elke deelgroep S_i een normaaldeler in G, voor $i = 1, \ldots, n-2$. Het is bekend dat dan het product

$$H = S_1 \cdots S_{n-1} = S_1(S_2(S_3 \cdots (S_{n-2}S_{n-1}) \cdots)$$

een deelgroep is van G, en wel een normaaldeler van G omdat bovendien S_{n-1} normaal is, nogmaals vanwege vraag c. Merk op dat het centrum Y van H de deelgroep $Z \cap H$ bevat. Het quotiënt H/Y is dus isomorf met het dubbele quotiënt $(H/(Z \cap H))/(Y/(Z \cap H))$. Omdat $H/(Z \cap H)$ isomorf is met het beeld van H in Z/G, is $H/(Z \cap Y)$ abels, en dus ook H/Y. De priemfactoren van $\#H$ zijn $p_1, \ldots, p_{n-1}$. Met inductie is H isomorf met het product van zijn niet-triviale Sylow deelgroepen. Omdat H en S_n normaaldelers zijn van G, is G isomorf met het product $H \times S_n$. De niet-triviale Sylow deelgroepen van H zijn dat ook van G want $p_n \not| \#H$. Omgekeerd, als S een niet-triviale Sylow deelgroep is van G, dan hebben we twee mogelijkheden: of S is een niet-triviale Sylow deelgroep van H, of S is gelijk aan S_n. Inderdaad, zij p het priemgetal zodat S een p-Sylow deelgroep is van G. Als $p = p_n$ dan is S met S_n geconjugeerd. Maar S_n is een normaaldeler in G, steeds volgens vraag c. Dus is dan $S = S_n$. Als $p = p_i$ met $i < n$, dan is S bevat in H want G is isomorf met $H \times S_n$ en $\#S$ is relatief priem met $\#S_n$. Dan is S natuurlijk een niet-triviale Sylow deelgroep van H. Samenvattend is de collectie niet-triviale Sylow deelgroepen van G gelijk aan de collectie niet-triviale Sylow deelgroepen van H verenigd met $\{S_n\}$. Omdat G isomorf is met $H \times S_n$, is G dus isomorf met het product van zijn niet-triviale Sylow deelgroepen **(1,5 pt)**.