Examen Algebra 2

15 Juni 2018

1. (a) Aangaande Gevolg 3.1.8 uit Galoistheorie, waar als voorwaarde vermeld staat dat E een ontbindingsveld moet zijn over K voor $f \in K[x]$. Geef een voorbeeld waarom deze voorwaarde niet kan worden weggelaten.

   (b) In het bewijs van 2.1.5(1) op p. 10 van Groepentheorie wordt voor alle $\omega \in \Omega$ en voor elke $x \in \omega$ de afbeelding $S_G(\omega) \to \omega : g \mapsto g \cdot x$ beschouwd. Leg in detail uit waarom deze afbeelding goed gedefinieerd en injectief is.

2. (a) Zij G_1, G_2, G_3 groepen met groepsmorfismen φ, ψ

$$G_1 \xrightarrow{\varphi} G_2 \xrightarrow{\psi} G_3$$

   waar we φ surjectief veronderstellen. Beschouw twee deelverzamelingen $R_1 \subset G_1$ en $R_2 \subset G_2$ met normale sluitingen kerφ en kerψ. Kies $S_1 \subset G_1$ met $\varphi(S_1) = R_2$. Bewijs dat de normale sluiting van $R_1 \cup S_1$ gelijk is aan ker$(\psi \circ \varphi)$.

   (b) Veronderstel dat G een eindige presentatie heeft en $\varphi : G \to H$ surjectief is met eindige kern. Toon aan dat H ook een eindige presentatie heeft.

3. Beschouw de keten van velduitbreidingen

$$\mathbb{Q} \subset K \subset L \subset \mathbb{C}$$

   met L Galois over K, $[K : \mathbb{Q}] = 2$, $[L : K] < \infty$ en $K \not\subseteq \mathbb{R}$. Zij $\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de complexe conjugatie. Toon aan dat L Galois is over $\mathbb{Q}$ als en slechts als $\tau(L) = L$ en bewijs dat in dit geval $[L \cap \mathbb{R} : \mathbb{Q}] = [L : K]$.

4. Zij G eindig, $H \subset G$ deelgroep en p een priemgetal.

   (a) Toon met een voorbeeld aan dat de doorsnede van H met een Sylow p-deelgroep van G niet perse een Sylow p-deelgroep van H hoeft te zijn.

   (b) Bewijs dat er minstens 1 Sylow p-deelgroep van G bestaat waarvoor dit wel geldt.
   (Hint : Neem P een Sylow p-deelgroep, toon aan dat $gPg^{-1} \cap H = Stab(gP)$ voor de actie van H op G/P door linkse vermenigvuldiging.) (Ik heb het ook zonder de hint kunnen aantonen.)

5. Zijn deze uitspraken waar of niet? Bewijs of weerleg.

   (a) Beschouw $G = G_1 * G_2$ voor eindige groepen G_1 en G_2 met impliciete morfismes $q_1 : G_1 \to G$ en $q_2 : G_2 \to G$. Als een element van G eindige orde heeft, zit dit in $q_1(G_1) \cup g_2(G_2)$.

   (b) Elke veelterm $f \in \mathbb{Q}[x]$ van graad p^2 met p een priemgetal is oplosbaar in termen van radicalen.

   (c) Er bestaan op isomorfisme na 4 groepen van orde 2018. (De priemfactorisatie van 2018 is $2 \cdot 1009$.