Examen G0U13 - Bewijzen en Redeneren
bachelor in de Wiskunde, bachelor in de Fysica,
maandag 22 augustus 2011, 14:00–18:00

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 4 pt	(b) 6 pt	
Vraag 2:	(a) 3 pt	(b) 3 pt	(c) 4 pt
Vraag 3:	(a) 3 pt	(b) 3 pt	(c) 4 pt
Vraag 4:	(a) 2 pt	(b) 8 pt	
Vraag 5:	(a) 3 pt	(b) 4 pt	(c) 3 pt

- Succes!

Naam:

Vraag 1 (a) Bewijs met volledige inductie dat de ongelijkheid

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

geldt voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) (Theorievraag) Bewijs dat $\mathbb{R}$ overaftelbaar is.

Naam:

Vraag 2 Zij A een niet-lege naar boven begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}$. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een strikt stijgende functie.

(a) Bewijs dat $f(A)$ naar boven begrensd is.

(b) Geldt er

$$\sup\left(f(A)\right) = f(\sup(A)) \qquad ?$$

Zo ja, geef een bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

(c) Is $f^{-1}(A)$ naar boven begrensd ? Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.

Naam:

Vraag 3 Voor elke functie $f : X \to Y$ definiëren we een relatie $R(f)$ op X door $(x_1, x_2) \in R(f)$ als en slechts als $f(x_1) = f(x_2)$.

(a) Bewijs dat $R(f)$ een equivalentierelatie is.

(b) Bewijs dat voor twee functies $f : X \to Y$ en $g : Y \to Z$ geldt dat

$$R(f) \subset R(g \circ f).$$

(c) Zij $g : Y \to Z$ gegeven. Is de volgende uitspraak juist?

- g is injectief als en slechts als voor elke verzameling X en voor elke functie $f : X \to Y$ geldt dat
$$R(f) = R(g \circ f).$$

Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Naam:

Vraag 4 (a) Geef de definitie van convergentie van een rij (a_n) van reële getallen.

(b) Bewijs met behulp van de definitie dat de rij (a_n) met

$$a_n = n\left(\sqrt{n^2 + 2011} - n\right), \qquad n \in \mathbb{N}$$

convergent is. Wat is de limiet?

Naam:

Vraag 5 (a) Schrijf de bewering dat $f : X \to Y$ niet bijectief is volledig met behulp van kwantoren zonder de negatie $\neg$ te gebruiken. U mag $\neq$ wel gebruiken.

(b) Voor een eindige, niet-lege verzameling X definiëren we $\mathcal{P}_e(X)$ en $\mathcal{P}_o(X)$ door

$$\mathcal{P}_e(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid |A| \text{ is even}\},$$
$$\mathcal{P}_o(X) = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid |A| \text{ is oneven}\}.$$

Laat zien dat $\mathcal{P}_e(X)$ en $\mathcal{P}_o(X)$ evenveel elementen hebben door een expliciete bijectie

$$F : \mathcal{P}_e(X) \to \mathcal{P}_o(X)$$

te geven.

[N.B.: U hoeft niet te bewijzen dat de F die u geeft inderdaad een bijectie is. U mag een onderscheid maken tussen de gevallen dat $|X|$ even en $|X|$ oneven is.]

(c) Gebruik onderdeel (b) om te bewijzen dat

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} = 2^{2n-1}.$$

geldt voor elke $n \in \mathbb{N}_0$.