

Juiced Monster Energy Juice Mango Loco: (Ik ben stilaan door aan het draaien)

Kwantummechanica van Professor Ruben De Groote

6 juni 2025, 14:00

Hierbij de vragen van het examen en oplossingen door een groep studenten. Deze zijn dus niet perfect omdat wij ook maar gewoon een hoop mensen zijn die dit examen eens gemaakt hebben. Wees dus kritisch en veel succes!

Vraag 1: Mondeling (4 punten)

Zijn volgende uitspraken juist of fout? Leg kort uit en bereid je voor om verder toe te lichten. Je wordt niet beoordeeld op formules, maar op wat je zegt.

- (a) Na een meting stort de golffunctie in, waardoor alle vorige informatie gewist wordt. Een volgende meting van een willekeurige grootte is totaal willekeurig.
- (b) Na een meting stort de golffunctie in. Een onmiddellijke meting van dezelfde grootte hierna levert hetzelfde resultaat. Is het mogelijk, nadat het systeem even met rust gelaten is, om alle andere originele resultaten daarna nog te bekomen?
- (c) Is het mogelijk om van een deeltje het totale impulsmoment en een projectie op een willekeurige as tegelijk te kennen?
- (d) Door de Schrödingervergelijking is de energie van een kwantumdeeltje altijd gekwantiseerd. Daarom heet het de 'kwantum'mechanica.

Vraag 1: Oplossing

(a) Na een meting van een grootte Q met hermitische operator $\hat{Q}$ vervalt de golf functie $\Psi(x, t)$ naar een eigenfunctie $\psi(x)$ van $\hat{Q}$ en wordt de bijhorende eigenwaarde q gemeten. De totale golf functie zit nu in deze toestand en komt hier ook niet zomaar weer uit. Hierna komt er enkel een tijdsafhankelijke wiggelfactor bij. Iedere meting van de grootte Q op dit deeltje geeft dus verder dat $Q = q$. De meting van een andere grootte A is afhankelijk van de compositie van $\psi = \sum_n c_n \phi_n$ met ϕ_n allemaal eigenfuncties van $\hat{A}$. Als $\hat{Q}$ en $\hat{A}$ met elkaar commuteren, en dus een gedeelde eigenbasis hebben, staat de waarde van A wel vast. Er wordt a gemeten, met a die voldoet aan $\hat{A}\psi = a\psi$.

(b) Het antwoord van deze vraag is geïncorporeerd in het vorige antwoord. Neen, de toestand ψ is zelf een oplossing van de Schrödingervergelijking, met de randvoorwaarden en normalisatie en voldoet dus aan alle wetten van de kwantummechanica. Er is geen reden dat deze terug naar de originele Ψ zou gaan.

(c) Twee operatoren zijn compatibel als hun commutator nul is. Volgens het onzekerheidsprincipe zijn twee compatibele operatoren tegelijk exact meetbaar. Algemeen gekende theorie, die ook in de notities staat, is dat de commutator van $\hat{L}^2$ en $\hat{L}_i$ nul is, voor i willekeurig gelijk aan x, y, z . Je kan dus het totale impulsmoment alsook één projectie tegelijk kennen. Echter commuteren de projecties niet met elkaar, dus kan je niet tegelijk twee projecties kennen.

(d) Dit is fout. Het vrije deeltje heeft bevoorbeeld een continu energiespectrum. Ook bestaan er potentialen met zowel continue als discrete energiewaarden, denk maar aan de deltapotentiaal, in het geval van een put.

Vraag 2: De Harmonische Oscillator (5 punten)

De ééndimensionale harmonische oscillator heeft Hamiltoniaan

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

- (a) Toon met een symmetrie-argument aan dat $\langle \hat{x} \rangle = 0$ en $\langle \hat{p} \rangle = 0$.
- (b) Beargumenteer dat dit argument niet toepasbaar is op $\langle \hat{x}^2 \rangle$ en $\langle \hat{p}^2 \rangle$.
- (c) Bereken $\langle \hat{x}^2 \rangle$ en $\langle \hat{p}^2 \rangle$ voor een algemene toestand ψ_n . *Hint: indien je hier integralen gaat proberen uitrekenen, kan je best een gemakkelijker manier zoeken.*
- (d) Bespreek het onzekerheidsprincipe voor $\hat{x}$ en $\hat{p}$. Leg uit wat er speciaal is aan de grondtoestand $n = 0$.

Vraag 2: Oplossing

(a) Voor een operator $\hat{Q}$ met getransformeerde operator $\hat{Q}' = \hat{\Pi}^\dagger \hat{Q} \hat{\Pi} = -\hat{Q}$ geldt $\langle \hat{Q} \rangle = 0$ voor de harmonische oscillator. Inderdaad, $\langle \hat{Q} \rangle = \langle \psi_n | \hat{Q} | \psi_n \rangle = -\langle \psi_n | \hat{\Pi}^\dagger \hat{Q} \hat{\Pi} | \psi_n \rangle = -\langle \hat{\Pi} \psi_n | \hat{Q} | \hat{\Pi} \psi_n \rangle$. Geweten is dat $\hat{\Pi} \psi_n = \pm \psi_n$ voor de eigen-toestanden van de harmonische oscillator. Er geldt dus, met $k = 0$ of $k = 2$, dat $\langle \hat{Q} \rangle = -\langle \hat{\Pi} \psi_n | \hat{Q} | \hat{\Pi} \psi_n \rangle = -(-1)^k \langle \psi_n | \hat{Q} | \psi_n \rangle = -\langle \hat{Q} \rangle$. Zo is aangetoond dat $\langle \hat{Q} \rangle = 0$. Geweten is dat $\hat{x}$ en $\hat{p}$ voldoen aan $\hat{Q}' = \hat{\Pi}^\dagger \hat{Q} \hat{\Pi} = -\hat{Q}$.

(b) De operatoren $\hat{x}^2$ en $\hat{p}^2$ voldoen niet aan de voorgaande regel. Bekijk hiervoor $(\hat{x}^2)' f(x) = \hat{\Pi}^\dagger (\hat{x}^2) \hat{\Pi} f(x) = \hat{\Pi} (x^2 f(-x)) = x^2 f(x) = \hat{x}^2 f(x)$ en $(\hat{p}^2)' f(x) = \hat{\Pi}^\dagger (\hat{p}^2) \hat{\Pi} f(x) = \hat{\Pi} (-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(-x)) = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) = \hat{p}^2 f(x)$ zodat duidelijk $(\hat{x}^2)' = \hat{x}^2$ en $(\hat{p}^2)' = \hat{p}^2$.

(c) In de algebraïsche uitwerking van de harmonische oscillator worden de ladderoperatoren $\hat{a}_+$ en $\hat{a}_-$ gebruikt. Deze zijn gedefinieerd als

$$\begin{cases} \hat{a}_+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(-i\hat{p} + m\omega\hat{x}), \\ \hat{a}_- = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(i\hat{p} + m\omega\hat{x}). \end{cases} \implies \begin{cases} \hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_+ + \hat{a}_-), \\ \hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\hat{a}_+ - \hat{a}_-). \end{cases}$$

Nu geldt

$$\begin{aligned} \langle \hat{x}^2 \rangle &= \langle \psi_n | \hat{x}^2 | \psi_n \rangle, \\ &= \langle \psi_n | \frac{\hbar}{2m\omega} (\hat{a}_+ + \hat{a}_-)^2 | \psi_n \rangle, \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle \psi_n | \hat{a}_+ + \hat{a}_- | \sqrt{n+1} \psi_{n+1} + \sqrt{n} \psi_{n-1} \rangle, \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle \psi_n | \sqrt{n+1} \sqrt{n+2} \psi_{n+2} + n \psi_n + (n+1) \psi_n + \sqrt{n} \sqrt{n-1} \psi_{n-1} \rangle, \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} (2n+1). \end{aligned}$$

Bemerk wel dat als $n = 0$ dat $\psi_{n-1} = 0$. In dit geval maakt dit geen verschil met de uitkomst, maar is wel een belangrijk punt om te overwegen in andere berekeningen. Analooog is

$$\begin{aligned} \langle \hat{p}^2 \rangle &= \langle \psi_n | \hat{p}^2 | \psi_n \rangle, \\ &= \langle \psi_n | -\frac{\hbar m\omega}{2} (\hat{a}_+ - \hat{a}_-)^2 | \psi_n \rangle, \\ &= -\frac{\hbar m\omega}{2} \langle \psi_n | \hat{a}_+ - \hat{a}_- | \sqrt{n+1} \psi_{n+1} - \sqrt{n} \psi_{n-1} \rangle, \\ &= -\frac{\hbar m\omega}{2} \langle \psi_n | \sqrt{n+1} \sqrt{n+2} \psi_{n+2} - n \psi_n - (n+1) \psi_n + \sqrt{n} \sqrt{n-1} \psi_{n-1} \rangle, \\ &= \frac{\hbar m\omega}{2} (2n+1). \end{aligned}$$

(d) Het onzekerheidsprincipe van plaats en impuls zegt dat $\sigma_x \sigma_p \geq \hbar/2$. Dit betekent dat als de locatie van een deeltje precies gekend is, met dus een kleine σ_x , dat dan de impuls van het deeltje niet tegelijk nauwkeurig bepaald kan worden. Dat volgt uit het feit dat deze operatoren niet commuteren. Voor de harmonische oscillator vinden we

$$\sigma_x = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(2n+1)$$

en

$$\sigma_p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(2n+1)$$

zodat

$$\sigma_x \sigma_p = \frac{\hbar}{2}(2n+1) \geq \frac{\hbar}{2}$$

omdat $n \geq 0$. Uitzonderlijk aan de grondtoestand is dat deze de ondergrens bereikt. Alle hogere toestanden hebben een systematische onzekerheid hoger dan de ondergrens.

Vraag 3: Totale Golffuncties (3 punten)

Gegeven zijn drie **ruimtelijke** golffuncties $\psi_a(x), \psi_b(x), \psi_c(x)$ en twee deeltjes die zich in deze toestanden bevinden.

(a) Hoeveel totale golffuncties kunnen geconstrueerd worden indien de twee deeltjes onderscheidbaar zijn.

(b) Noteer elke mogelijke golffunctie indien het twee spin $1/2$ -deeltjes zijn. *Nadat ik de professor voor verduidelijking vroeg over deze vraag, vertelde hij me dat het ononderscheidbare ‘echte’ fermionen met $m = -1/2$ of $m = 1/2$ zijn.*

Vraag 3: Oplossing

(a) Analooq aan de oplossing van een oefening uit de oefenzitting, heb ik dat beide deeltjes in een willekeurige toestand kunnen zitten, en dus $\Psi(x_1, x_2) = \psi_i(x_1)\psi_j(x_2)$ met i en j gelijk aan a, b, c . Er bestaan dus 9 mogelijke totale golffuncties.

(b) We hebben te maken met ononderscheidbare fermionen. Deze moeten een antisymmetrische golffunctie hebben. De totale golffunctie is $\Psi(x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2)\chi(1, 2)$. Als Ψ antisymmetrisch voor een deeltjeswissel is, is oftewel $\psi(x_1, x_2) = \psi(x_2, x_1)$ en $\chi(1, 2) = -\chi(2, 1)$, of, $\psi(x_1, x_2) = -\psi(x_2, x_1)$ en $\chi(1, 2) = \chi(2, 1)$. Dit komt overeen met een symmetrische ruimtelijke golffunctie en de deeltjes in de singlet state, en een antisymmetrische ruimtelijke golffunctie en de deeltjes in één van de drie triplet states. We vinden voor de singlet toestand

$$\bullet \Psi_1(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_i(x_1)\psi_j(x_2) + \psi_j(x_1)\psi_i(x_2)) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle).$$

Hier zijn i en j gelijk aan a, b, c . Er zijn dus negen zo een toestanden. Voor de triplet toestanden vinden we

$$\bullet \Psi_2(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_i(x_1)\psi_j(x_2) - \psi_j(x_1)\psi_i(x_2)) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle),$$

$$\bullet \Psi_3(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_i(x_1)\psi_j(x_2) - \psi_j(x_1)\psi_i(x_2)) \cdot |\uparrow\downarrow\rangle,$$

$$\bullet \Psi_4(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_i(x_1)\psi_j(x_2) - \psi_j(x_1)\psi_i(x_2)) \cdot |\downarrow\uparrow\rangle.$$

Hier zijn weer i en j gelijk aan a, b, c maar mag i niet gelijk zijn aan j , omdat anders de totale golffunctie verdwijnt. Er zijn dus drie keer zes¹ van deze toestanden.

¹Ik ben niet zeker of de professor een verschil maakt tussen bijvoorbeeld de toestand met $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) - \psi_b(x_1)\psi_a(x_2))$ en $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_b(x_1)\psi_a(x_2) - \psi_a(x_1)\psi_b(x_2))$ omdat dit fysisch dezelfde toestand is; de factor -1 heeft geen effect op de kansdichtheid $|\Psi|^2$. Indien we fysisch verschillende toestanden willen tellen, zijn er maar drie keer drie.

Vraag 4: Angular moment (3 punten)

Stel een golf functie

$$\Psi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{z}{r} + A \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{x}{r} \right).$$

(a) Bepaal de constante A .

(b) Stel dat je $\hat{L}^2$ meet. Wat zijn de mogelijke uitkomsten en wat is de kans op elke uitkomst?

(c) Stel in de plaats van $\hat{L}^2$ dat je $\hat{L}_z$ meet. Wat is de kans dat je $-2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar$ uitkomt?

Volgende tabel was gegeven.

$\ell = 0$ [\[edit\]](#)

$$Y_0^0(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}}$$

$\ell = 1$ [\[edit\]](#)

$$\begin{aligned} Y_1^{-1}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot e^{-i\varphi} \cdot \sin \theta &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \frac{(x - iy)}{r} \\ Y_1^0(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \cos \theta &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cdot \frac{z}{r} \\ Y_1^1(\theta, \varphi) &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot e^{i\varphi} \cdot \sin \theta &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \cdot \frac{(x + iy)}{r} \end{aligned}$$

$\ell = 2$ [\[edit\]](#)

$$\begin{aligned} Y_2^{-2}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot e^{-2i\varphi} \cdot \sin^2 \theta &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot \frac{(x - iy)^2}{r^2} \\ Y_2^{-1}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot e^{-i\varphi} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot \frac{(x - iy) \cdot z}{r^2} \\ Y_2^0(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \cdot (3 \cos^2 \theta - 1) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} \cdot \frac{(3z^2 - r^2)}{r^2} \\ Y_2^1(\theta, \varphi) &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot e^{i\varphi} \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot \frac{(x + iy) \cdot z}{r^2} \\ Y_2^2(\theta, \varphi) &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot e^{2i\varphi} \cdot \sin^2 \theta &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cdot \frac{(x + iy)^2}{r^2} \end{aligned}$$

Figure 1: Sferische harmonische functies.

Vraag 4: Oplossing

Bemerkt dat

$$\Psi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \frac{z}{r} + A \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{x}{r} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (Y_1^0(\theta, \phi) + A(Y_1^{-1}(\theta, \phi) - Y_1^1(\theta, \phi))).$$

(a) Zoals gekend zijn de sferische harmonische orthonormaal, zodat

$$\frac{1}{2} + \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2} = 1.$$

Hieruit volgt $A = 1/\sqrt{2}$.

(b) Een meting van L^2 zal een eigenwaarde van $\hat{L}^2$ opleveren. De eigenwaarden van deze operator zijn $\hbar l(l+1)$. Elke sferische harmonische in de superpositie $\Psi(x, y, z)$ heeft $l = 1$. Er kan dus maar één waarde, $2\hbar$, gemeten worden. Dit heeft 100% kans.

(c) Een meting van L_z zal een eigenwaarde van $\hat{L}_z$ opleveren. De eigenwaarden van deze operator zijn $\hbar m$. De sferische harmonischen in de superpositie $\Psi(x, y, z)$ hebben $m = -1, 0, 1$, zodat $-\hbar, 0, \hbar$ gemeten kunnen worden. De kansen worden bepaald door de coëfficiënten c_n van de sferische harmonischen in $\Psi(x, y, z)$, met kans $|c_n|^2$. Dit geeft volgende kansen:

- $P(L_z = \pm 2\hbar) = 0$,
- $P(L_z = -\hbar) = 25\%$,
- $P(L_z = 0) = 50\%$,
- $P(L_z = \hbar) = 25\%$.

Vraag 5: Perturbatierekenen, Lineaire Algebra Breinrot (5 punten)

Stel een driedimensionaal systeem met basis $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ en Hamiltoniaan $\hat{H}_0 = g_0|0\rangle\langle 1| + g_0|1\rangle\langle 0|$ met g_0 een reëel getal.

- (a) Bereken het spectrum en de eigentoestanden van $\hat{H}_0$.
- (b) Stel nu een $\hat{H}_1 = g_1|1\rangle\langle 2| + g_1|2\rangle\langle 1|$ met g_1 reëel. Bereken exact de eigenwaarden van $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$.
- (c) Behandel nu $\hat{H}_1$ als een storing op $\hat{H}_0$. Bereken voor $g_1 \ll g_0$ perturbatief de energiewaarden met een eerste orde correctie.

Definieer een nieuwe $\hat{H}_0 = g_0|0\rangle\langle 1| + g_0|1\rangle\langle 0| + g_0|2\rangle\langle 2|$.

- (d) Bereken van de nieuwe $\hat{H}_0$ de exacte eigenwaarden en eigentoestanden. *Hint: spoiler alert, de volgende vraag gaat fundamenteel anders zijn dan vraag (c).*
- (e) Behandel wederom perturbatief $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ perturbatief ($\hat{H}_1$ is onveranderd). Bereken het spectrum van $\hat{H}$ in eerste orde degeneratieve perturbatietheorie.

Vraag 5: Oplossingen

Stel de basis $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ voor als

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In deze voorstelling heeft de Hamiltoniaan volgende vorm

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} 0 & g_0 & 0 \\ g_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) De eigenwaarden, of dus het spectrum, van $\hat{H}_0$ zijn $0, g_0, -g_0$. De eigen toestanden, wat de genormaliseerde eigenvectoren zijn, zijn

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |2\rangle, \psi_{g_0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \psi_{-g_0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle).$$

(b) We hebben nu deze matrixvoorstellingen

$$\hat{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_1 \\ 0 & g_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & g_0 & 0 \\ g_0 & 0 & g_1 \\ 0 & g_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De matrix van $\hat{H}$ heeft als eigenwaarden $0, \sqrt{g_0^2 + g_1^2}, -\sqrt{g_0^2 + g_1^2}$.

(c) Als we perturbatief rekenen in eerste orde, zijn de correcties op de energie van de eigenstaat $|n\rangle$ van $\hat{H}_0$ gelijk aan de diagonaalelementen van de matrix van $\hat{H}_1$. Dat wilt zeggen dat $E_n^{(1)} = \langle n | \hat{H}_1 | n \rangle = (\hat{H}_1)_{nn}$. Echter zijn alle diagonaalelementen van $\hat{H}_1$ nul, dus zijn de correcties op de energieniveaus in eerste orde nul. De energiewaarden worden dus niet aangepast, en blijven $0, g_0, -g_0$. Dit vergelijken met de exacte waarden uit (b), door de Taylorexpanisie van $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2}$, geeft voor $g_1 \ll g_0$ dat

$$\pm \sqrt{g_0^2 + g_1^2} = \pm g_0 \sqrt{1 + \left(\frac{g_1}{g_0}\right)^2} \approx \pm g_0 \left(1 + \frac{g_1^2}{2g_0^2}\right) = \pm \left(g_0 + \frac{g_1^2}{2g_0}\right) \approx \pm g_0.$$

De eerste orde benadering is dus een redelijke benadering als $g_1 \ll g_0$, ookal is de correctie onbestaand.

(d) Nu heeft de matrix van $\hat{H}_0$ een voorstelling

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} 0 & g_0 & 0 \\ g_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 \end{pmatrix}.$$

Deze heeft eigenwaarden $-g_0$ en g_0 , met g_0 multipliciteit twee. De genormaliseerde eigenvectoren, of dus de eigentoestanden, zijn

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |2\rangle, \psi_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \psi_{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle).$$

Hier zijn ψ_0 en ψ_1 toestanden met dezelfde energiewaarde g_0 .

(e) Om de perturbaties op deze energiewaarde g_0 te vinden, moeten we de deelmatrix die correspondeert met de gedegenererde ruimte diagonaliseren. Hiervoor gebruiken we de nieuwe orthonormale basis $\{\psi_0, \psi_1, \psi_{-1}\}$, zodat de gedegenererde ruimte afleesbaar is in de nieuwe voorstelling van de perturbatiematrix voor deze basis. We vinden dus voor de onverstoorte Hamiltoniaan $\hat{H}_0$ dat deze een diagonaalmatrix wordt:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & g_0 & 0 \\ g_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 & 0 & 0 \\ 0 & g_0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_0 \end{pmatrix}.$$

Na deze controle, kunnen we ook de perturbatie $\hat{H}_1$ omzetten naar de basis $\{\psi_0, \psi_1, \psi_{-1}\}$. We vinden

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_1 \\ 0 & g_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{g_1}{\sqrt{2}} & -\frac{g_1}{\sqrt{2}} \\ \frac{g_1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{g_1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De submatrix van de gedegenererde ruimte is

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{g_1}{\sqrt{2}} \\ \frac{g_1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Deze heeft eigenwaarden, wat de eerste orde gedegenererde correcties zijn, gelijk aan $\pm \frac{g_1}{\sqrt{2}}$. Het spectrum van $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$, is dus

$$-g_0, g_0 + \frac{g_1}{\sqrt{2}}, g_0 - \frac{g_1}{\sqrt{2}}.$$