

AN Examen 2024 Januari oplossingen

Washington Irving

February 5, 2024

1 Kepler

Dit is triviaal ¹, zie hoofdstuk 7 van Gregory voor uitwerking.

2 Roterende cilinder

2.1 Traagheidsmoment

Zie de appendix van Gregory. $I = \frac{MR^2}{2}$

2.2 Hoeksnelheid

Gebruik hiervoor behoud van impulsmoment. $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$ per definitie, neem de as C als oorsprong. Dan is $L_0 = mvb$ het oorspronkelijke impulsmoment. Bekijk nu de eindtoestand. Het touw is dan volledig gewikkeld rond de cilinder zodat m en de cilinder samen roteren met hoeksnelheid ω . Dit nieuwe object heeft traagheidsmoment $I_\Sigma = I_C + I_m$, met $I_C = \frac{MR^2}{2}$ het traagheidsmoment van de cilinder en $I_m = mR^2$ het traagheidsmoment van de massa rond C . We kunnen nu gebruiken dat $L = I\omega$ in 1 dimensie en dat L een constante is. Uit het eerste volgt dat $L_1 = (\frac{MR^2}{2} + mR^2)\omega$. Uit het tweede is dan $L_0 = L_1$ zodat $m vb = (\frac{MR^2}{2} + mR^2)\omega$. Dus $\omega = \frac{m vb}{R^2 \frac{M}{2} + m}$. Als $M \gg m$ zien we dat $\omega \approx 0$, als $m \gg M$ is $\omega \approx \frac{vb}{R^2}$, zoals we zouden verwachten. Merk op dat dit een inelastische botsing is, dus behoud van mechanische energie tussen de begin- en eindtoestand is geschonden.

2.3 Richting

De cilinder draait uiteindelijk in tegenwijzerzin, volgens de rechterhandregel wijst ω in de $-\hat{z}$ richting (zie opgave voor het assenstelsel).

¹Maar 2 pagina's schrijven en een random substitutie

3 Hangende kabel

3.1 $T(z)$

Dit ziet er speciaal uit maar is triviaal.² De enige voorwaarde waaraan de spankracht moet voldoen is het balanceren van het gewicht van kabel eronder en M . De massa van het stuk kabel onder hoogte z is $\frac{b-z}{b}m_T$. Dus de spankracht is:

$$T = m_\Sigma g = (m_k(z) + M)g = (\frac{b-z}{b}m_T + M)g \quad (1)$$

3.2 T minimaal

Intuïtief is meteen duidelijk dat T minimaal is op het onderste punt van de kabel, dus $z = b$.

3.3 Waarom zijn bananen krom?

Het is triviaal.

$$\frac{dT}{dz} = \frac{-m_T g}{b} \quad (2)$$

T is dus strikt dalend, het domein van z is beperkt tot $[0, b]$ dus op het randpunt $z = b$ is T minimaal.

4 Lift

Ga over naar het niet-inertiaalstelsel van de lift. Omdat er enkel translatie is (geen rotatie) is de pseudokracht simpel: $\vec{F}_p = -M\vec{a}'$. Hier is a' de versnelling van het frame van de lift ten opzichte van de Aarde. Door deze kracht in te voeren kunnen we Newton 2 gebruiken.

$$\vec{F}_\Sigma + \vec{F}_p = M\vec{a} \quad (3)$$

We willen dat de kabel niet uit elkaar valt dus $\vec{a} = 0$ en $\vec{F}_\Sigma = M\vec{g} - \vec{T}$ waar beneden de positieve richting is. $\vec{a}' = \frac{\vec{g}}{4}$, substitueer:

$$M\vec{g} - \vec{T} - \frac{M\vec{g}}{4} = 0 \quad (4)$$

Dit geeft dezelfde situatie als hiervoor maar met effectieve $g' = \frac{3}{4}g$. Dan is per analogie het antwoord:

$$T = m_\Sigma \frac{3}{4}g = (m_k(z) + M)\frac{3}{4}g = \frac{3}{4}(\frac{b-z}{b}m_T + M)g \quad (5)$$

²Deze keer fr

5 Tarzan en Jane

5.1 Strategie

Splits deze vraag in 4 delen. De begintoestand is massa $2m$ op hoogte h (1). Dan beweegt deze tot hoogte 0(2), waar het perfect inelastisch botst met massa m (Tarzan pakt Jane)(3). Dan beweegt de nieuwe massa $3m$ tot hoogte $(1 - \cos \theta)l$ met $\theta = \frac{\pi}{4}$ (4). Tot hier is het 2 keer toepassen van behoud van energie en behoud van impuls. Hiermee kunnen we de beginsnelheid voor het kinematica deel bepalen.

5.2 Deel 1

Tussen toestand 1 en 2 is er behoud van mechanische energie:

$$2mgh = \frac{2mv_2^2}{2} \quad (6)$$

zodat $v_2 = \sqrt{2gh}$. Nu komt de inelastische botsing. Hierdoor is energie niet behouden tussen toestanden 1 en 4.³ Gebruik dus behoud van impuls tussen toestanden 2 en 3: $p_2 = p_3$. Dus

$$2mv_2 = 3mv_3 \quad (7)$$

zodat $v_3 = \frac{2}{3}v_2$. Dan is

$$E_3 = \frac{3mv_3^2}{2} = \frac{4mgh}{3} \quad (8)$$

Gebruik nu opnieuw behoud van energie tussen toestand 3 en 4: $T_3 = T_4 + V_4$, met T en V respectievelijk kinetische en potentiële energie. Dan:

$$3mgl(1 - \cos \theta) + \frac{3mv_4^2}{2} = \frac{4mgh}{3} \quad (9)$$

zodat

$$v_4^2 = \frac{8gh}{9} - 2gl(1 - \cos \theta) \quad (10)$$

5.3 Deel 2

Nu komt de kinematica. Neem het moment dat Tarzan de liaan loslaat als $t = 0$ en neem zijn positie op dat moment als $\vec{r}(0) = (0, 0)$. Neem $\vec{v}(0) = (v_x, v_y)$. De hoek tussen zijn snelheid en de horizontale is $\theta = \frac{\pi}{4}$, zodat $v_x = v_y$. Opdat Tarzan en Jane over de rivier geraken moet op het tijdstip τ waarop $y = -l(1 - \cos \theta)$ (hoogte van de rivier) gelden $x = D$ (breedte van de rivier).

$$D = v_x \tau \quad (11)$$

³Een onaangename verrassing voor de auteur 30 minuten voor het einde

$$v_y \tau - \frac{g\tau^2}{2} = -l(1 - \cos \theta) \quad (12)$$

Het is veel sneller om eerst $\tau = \frac{D}{v_x}$ te nemen en invullen dan de kwadratische vergelijking oplossen. Vul in:

$$D \frac{v_y}{v_x} - \frac{gD^2}{2v_x^2} = -l(1 - \cos \theta) \quad (13)$$

We weten reeds dat $v_x = v_y$, dat invullen en omvormen geeft:

$$v_x^2 = \frac{gD^2}{2(D + l(1 - \cos \theta))} \quad (14)$$

5.4 Afmaken

Omdat $\theta = \frac{\pi}{4}$ is $v_x = \frac{v_4}{\sqrt{2}}$ zodat $v_x^2 = v_4^2/2$. In de vorige vergelijking invullen geeft:

$$v_4^2 = \frac{gD^2}{2(D + l(1 - \cos \theta))} \quad (15)$$

Nu v_4 invullen:

$$\frac{8gh}{9} - 2gl(1 - \cos \theta) = \frac{gD^2}{2(D + l(1 - \cos \theta))} \quad (16)$$

zodat:

$$h = \frac{9}{4}l(1 - \cos \theta) + \frac{9D^2}{16(D + l(1 + \cos \theta))} \quad (17)$$

Volgens de opgave is $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}$, vul in⁴:

$$h = \frac{3}{4}l + \frac{9D^2}{16(D + \frac{l}{3})} \quad (18)$$

De auteur garandeert de juistheid van de algebra om deze uitkomst te bekomen niet.

⁴Dus 8=9 en 0=1