

Examen AN3

Door Herbert McLichtsnelheidchoke

29 Januari 2025

Disclaimer

Dit examen bestond uit vijf vragen, met fucking veel deelvragen die vaak niks met elkaar te maken hadden. De eerste drie waren van het deel van Bartic en de andere van het deel van Cocolios. De oplossingen zijn gemaakt door een student, en kunnen dus fouten bevatten. Wees dus kritisch en neem dit niet zomaar aan voor feit.

Vraag 1: Deel 1

(a) Beschouw een atoom met één enkel elektron in de grondtoestand gebonden aan de positief geladen kern. De ionisatiënergie van dit atoom bedraagt 217.6 eV.

1. Vind de energie van de eerste en tweede aangeslagen toestand van het elektron.
2. Hoeveel positieve ladingen bevat de kern?
3. Wat is de kortste golflengte van foton dat geabsorbeerd kan worden door het atoom in de grondtoestand?
4. Een geëxciteerd elektron bevindt zich ongeveer 10^{-9} s in de eerste aangeslagen toestand voor terug te vallen naar de grondtoestand. Wat is de breedte van de spectraallijn die bij deze transitie hoort?

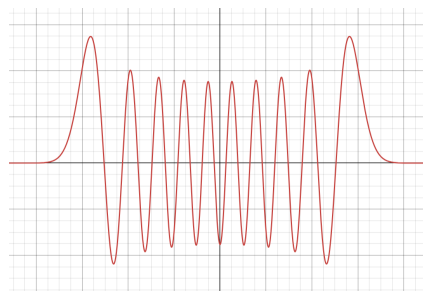
(b) Is de K_α lijn van wolfram (W) zichtbaar als de spanning in de Röntgenbuis 30 kV bedraagt? Leg uit waarom wel of niet.

(c) Atoommassa's worden vaak in units gemeten, met een gewenste nauwkeurigheid van 10^{-6} u. Beschouw een onstabiel atoom met een levensduur van gemiddeld 10^{-20} s. Heeft dit een significant effect op ons vermogen de massa van dit atoom te meten met de gewenste nauwkeurigheid?

(d) Wat is de theoretische resolutielimiet van een elektronenmicroscop? Leg ook uit waarom.

(e) In een experiment zoals die van Stern en Gerlach worden atomen met één enkel elektron in de $2p$ schil onderzocht. In hoeveel componenten zou de bundel worden opgesplitst?

(f) De bijstaande figuur is een voorbeeld van een golf functie in functie van de positie van een kwantummechanisch deeltje als harmonische oscillator. Je merkt een variatie in golflengte, met een grotere golflengte hoe verder je naar de buitenkanten van het klassiek toegelaten gebied kijkt. Leg uit van waar deze variatie komt.



Oplossingen Vraag 1: Deel 1

(a)

1. Je hebt één elektron in het atoom, zodat energieniveaus exact beschreven worden volgens het atoommodel van Bohr. De ionisatieënergie komt overeen met hoeveel energie je moet toevoegen aan het elektron om het te verwijderen van het atoom. Dit betekent dat $E_1 = -217.6$ eV. Nu is volgens Bohr

$$E_n = \frac{E_1}{n^2}$$

zodat $E_2 = -54.4$ eV en $E_3 = -24.2$ eV.

2. Kies vervolgens een energieniveau naar keuze en vorm de vergelijking

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 m}{8 \varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$$

om naar Z . Je vindt $Z = 4$.

3. Een foton met kortere golflengte heeft meer energie, je wilt dus ΔE maximaliseren. Er geldt

$$\Delta E = \frac{Z^2 e^4 m}{8 \varepsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Dit is maximaal als $n' = 1$ en je n naar oneindig laat gaan. Dan komt deze uitdrukking overeen met de ionisatieënergie. Vind dan λ uit

$$E = \frac{hc}{\lambda}.$$

Je zou $\lambda = 5.71$ nm moeten vinden.

4. Gebruik het onzekerheidsprincipe $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ zodat $\Delta E = \hbar / \Delta t$. Dan kan je de breedte d berekenen als

$$d = \left| \frac{hc}{E - \Delta E} - \frac{hc}{E + \Delta E} \right|$$

met $E = E_2 - E_1$ de energie die vrijkomt in deze transitie. Je kan ook gebruik maken dat

$$\lambda = \frac{hc}{E} \quad \text{en dus} \quad \Delta \lambda = \frac{hc}{E^2} \Delta E.$$

In dit geval is $d = 2\Delta \lambda$. Op mijn examen had ik $d = 5.57 \times 10^{-16}$ m, echter nu ik het hier doe vind ik $d = 6.16 \times 10^{-17}$ m, wat spijtig is voor mij.

(b) Op de K_α -lijn te produceren, moeten de elektronen een energie bevatten die groter of gelijk, in absolute waarde, is aan de energie van een elektron in de K-schil van wolfram. Hiervoor kan je weer het model van Bohr gebruiken omdat je je in de K-schil bevat. Er geldt $E_1 = -74$ keV. De elektronen worden echter maar versneld tot een energie van $E = q \cdot V = 30$ keV, zodat de K_α -lijn niet zichtbaar zal zijn.

(c) Gebruik wederom het onzekerheidsprincipe $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ zodat $\Delta E = \hbar / \Delta t$. Nu is echter

$$m = \frac{E}{c^2} \quad \text{zodat} \quad \Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} = \frac{\hbar}{c^2 \Delta t} = 7.06 \times 10^{-5} \text{ u}.$$

Aangezien dit groter is dan de gewenste nauwkeurigheid, is er dus inderdaad een significante impact op het vermogen de massa van dit deeltje te meten.

(d) De theoretische resolutielimiet wordt gegeven door de de Broglie-golflengte van de elektronen. Het enige onderlinge verschil tussen elektronenmicroscopen is de potentiaal waarmee de elektronen versneld worden. De fundamentele limiet van de resolutie wordt dus vastgelegd door de wetten

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad \text{en} \quad E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

met E de totale energie van de invallende elektronen.

- (e) @Sam of iemand die wel wist wat de fuck dit experiment betekent pls schrijf tekstje uit.
- (f) De potentiële energie van een harmonische oscillator neemt toe naarmate je verder van het centrum gaat. De golflengte van de golffunctie is echter korter wanneer het deeltje meer kinetische energie bevat. Aangezien totale energie constant is, zal de kinetische energie dus afnemen hoe verder je van het centrum gaat, wat resulteert in een grotere golflengte aan de randen van het klassiek toegelaten gebied.

Vraag 1: Deel 2

Stel

$$\psi_0(x) = Ae^{-ax^2}$$

is een oplossing van de tijdsafhankelijke Schrödingervergelijking voor een ééndimensionale harmonische oscillator met massa m en pulsatie¹ ω_0 . Gebruik normalisatie om de constante A in functie van m en ω_0 te bepalen.

¹Als je geen idee hebt wat dit betekent, ik ook niet :(.

Oplossing Vraag 1: Deel 2

Normalisatie betekent dat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0(x)|^2 dx = 1.$$

Je vindt hieruit door gebruik te maken van de Gaussische² dat

$$A = \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Om nu nog a in functie van m en ω_0 te zetten, moet je invullen in de Schrödingervergelijking

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_0(x)}{dx^2} + U(x) \psi_0(x) = E \psi_0(x)$$

zodat

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (4a^2 x^2 - 1) + \frac{1}{2} k x^2 = E.$$

De totale energie is onafhankelijk van x , dus moet

$$\frac{1}{2} k = \frac{2\hbar^2 a^2}{m} \quad \text{zodat} \quad a = \frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}.$$

Nu moet je echter nog invullen dat $k = m\omega_0^2$ en dus

$$A = \left(\frac{2}{\pi} \frac{m\omega_0}{2\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

²De Gaussische integraal $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Vraag 1: Deel 3

Vind de amplitude van een klassieke oscillator met energie gelijk aan de energie van een kwantumoscillator³ in kwantumtoestand n .

³Deze werd niet gegeven spijtig genoeg.

Oplossing Vraag 1: Deel 3

De oplossing van een klassieke harmonische oscillator is gegeven door $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ zodat

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2.$$

Dit omvormen geeft

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2E}{m}}.$$

Als je wist dat $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega$, dan is de rest van deze vraag eenvoudigweg invullen. Je vindt dan

$$A = \sqrt{\frac{(2n+1)\hbar\omega}{\omega^2 m}} = \sqrt{\frac{(2n+1)\hbar}{\omega m}}.$$

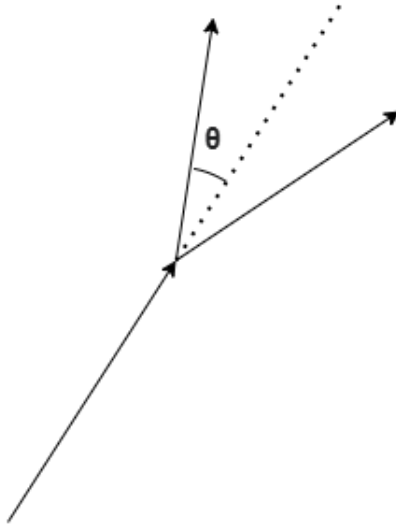
Vraag 2

Een π^- -deeltje met een rustmassa van $135 \text{ MeV}/c^2$ en een snelheid van $v = 0.98c$ vliegt doorheen het laboratorium. Ineens vervalt het in twee gammafotonen die allebei een hoek θ maken met de oorspronkelijke bewegingsrichting van het π^- -deeltje. Vind deze hoek θ en geef de energie van beide fotonen.

Oplossing Vraag 2

Volgens onderstaande tekening is het duidelijk dat de hoek theta berekend kan worden als verhouding van hypothetisch afgelegde afstanden, namelijk

$$\cos(\theta) = \frac{v \cdot t}{c \cdot t}$$



omdat $v \cdot t$ de hypothetisch afgelegde weg van het pion is, mocht dit nog bestaan, en $c \cdot t$ de afgelegde weg van het foton is. Dus vind je $\cos(\theta) = 0.98$ wat geeft dat

$$\theta = 11.5^\circ.$$

De energie van elk foton is exact de helft van de totale energie van het pion. Je berekent dus

$$E = \frac{1}{2} \gamma m v = 339.2 \text{ MeV}.$$

Vraag 3

Stel

$$\psi(x) = Cxe^{-bx}$$

met $C, b \in \mathbb{R}$ is een oplossing van de tijdsafhankelijke Schrödingervergelijking in een bepaald gebied⁴. Vind nu de potentiële energie en de totale energie van het kwantummechanisch deeltje.

Hint: De totale energie moet een constante zijn⁵, en dus onafhankelijk zijn van x .

⁴Je weet dat je gescamd bent als ze wiskundig accurater zijn in welke verzameling je constanten moet nemen op een puur natuurkundig vak dan in de tweede TTT van Gewone Differentiaalvergelijkingen.

⁵Wel raar dat hier deze hint pas gegeven wordt, aangezien ik het al toegepast heb in Vraag 1: Deel 2.

Oplossing Vraag 3

Vul ψ in in de Schrödingervergelijking

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

en vind

$$-\frac{\hbar^2}{2m} bC e^{-bx} (bx - 2) + U(x)C x e^{-bx} = EC x e^{-bx}.$$

Je mag natuurlijk schrappen en delen door x want dit is fysica, dus

$$-\frac{\hbar^2}{2m} b(bx - 2) + xU(x) = xE$$

en bijgevolg

$$\frac{\hbar^2 b}{mx} - \frac{\hbar^2 b^2}{2m} + U(x) = E,$$

zodat je nu, met A een constante, kan zeggen⁶ dat

$$U(x) = A - \frac{\hbar^2 b}{mx}.$$

Deze constante kan je kiezen, want zo werkt potentiële energie. Je vindt dus ook dat

$$E = A - \frac{\hbar^2 b^2}{2m}.$$

Ik weet niet of je A weg krijgt uit deze vergelijking.

⁶Als je dit volledig correct wilt verantwoorden, kan je de vorige gelijkheid afleiden naar x en $U'(x)$ oplossen, je vind natuurlijk hetzelfde.

Vraag 4

Deze vraag gaat zögezegd over de nucleaire horloge⁷ Er wordt overwogen om ^{229}Th te gebruiken om een nucleair horloge op te stellen. De energie van de eerste geëxciteerde toestand van de kern bedraagt 8.10 eV.

(a) Geef de grootteorde van de energie geassocieerd met volgende processen, concepten of bindingen. Leg ook uit waarom.

1. De totale bindingsenergie van een ^{229}Th atoom.
2. De energie die geassocieerd wordt met geëxciteerde kernen.
3. De bindingsenergie van het buitenste elektron van ^{229}Th .
4. De bandgap van halfgeleiders.

(b) ^{229}Th vervalst via alfastraling met een halfwaardetijd van 7932 jaar en een Q_α -waarde van 5167.6 keV. Bereken de geassocieerde kinetische energie van het α -deeltje⁸.

(c) De effectieve waarde van de kinetische energie van het α -deeltje is 4845 keV. Komt dit overeen met jouw berekening? Waarom wel of niet?

(d) Wat is het verschil tussen gammastraling en X-straling.

(e) Leg uit met welke detectoren gamma- en X-straling gedetecteerd wordt. Leg ook de werking van deze detectoren uit.

(f) Om een nucleair horloge te maken heb je een laser nodig om de kern naar de eerste geëxciteerde toestand te brengen. Welke golflengte en kleur laser heb je nodig om het ^{229}Th te gebruiken als nucleair horloge?

(g) Ook is een type kristal nodig om een nucleair horloge op te stellen. Dit moet de laser doorlaten en heeft dus een bandgap nodig die groter is dan de energie die nodig is om de ^{229}Th -kern te exciteren. Welk soort vastestof is daarvoor nodig en waarom?

(h) Er wordt voorgesteld CaF_2 te gebruiken. Welk type kristal is dat (binding) en waarom is dit een goede optie?

⁷Ik had hier nog nooit van gehoord, maar je hebt het niet nodig voor de vraag op te lossen.

⁸Als je je afvraagt waar de massa van het Thorium gegeven was, wij ook. Het was niet gegeven, want dat zou te gemakkelijk zijn natuurlijk.

Oplossing Vraag 4

(a) Sommige grootteordes zijn te berekenen. Anderen moet je afschatten of gewoonweg gokken.

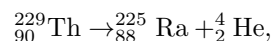
1. De zwaardere elementen hebben een bindingsenergie per nucleon rond de 8 MeV, zodat

$$8 \cdot 229 \text{ MeV} \approx 2 \text{ GeV},$$

en je dus in de orde van GeV zit.

2. Dit vond ik echt de meest louché vraag ooit. Ik heb MeV geantwoord. Chat GPT zegt dat het in keV tot MeV kan zitten, wat maar liefst een bereik van vier grootteordes is, en dus ook geen moer helpt.
3. Je kan dit berekenen met het model van Bohr. De buitenste elektronen zitten in de zevende schil, dus $n = 7$, en worden afgeschermd door 88 elektronen, dus vervang je $Z = 90 - 88 = 2$. Je vindt ongeveer grootteorde van eV.
4. De bandgap van halfgeleidermateriaal bedraagt minstens 1 eV, maar is nooit meer dan 5 eV, waarschijnlijk is deze bovengrens zelfs veel te hoog, aangezien het de ondergrens van een isolator is. Het juiste antwoord is dus eV.

(b) Je hebt behoud van impuls en energie nodig. Ook zijn de exacte massa's niet gegeven. Benader dus $m_\alpha/m_{\text{Ra}} = 4/225$, de verhouding van de atoomgetallen. We gaan na of we klassiek mogen werken. De reactie is



zodat $m_{\text{Ra}}v_{\text{Ra}} = m_\alpha v_\alpha$ en $Q_\alpha = K_{\text{Ra}} + K_\alpha$. Los dan op met behoud van impuls dat

$$\frac{1}{2}m_{\text{Ra}}v_{\text{Ra}}^2 + \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 \left(\frac{m_\alpha}{m_{\text{Ra}}} + 1 \right) = Q_\alpha.$$

Dit geeft

$$K_\alpha = \frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 = 5077.3 \text{ keV}.$$

Dit zou betekenen dat $v_\alpha = 1.56 \times 10^7 \text{ m/s} = 0.052c$ met dan $\gamma = 1.001361227$. De relativistische invloed is dus verwaarloosbaar omdat de snelheid kleiner is dan een tiende van de lichtsnelheid⁹.

(c) Nee, dit is niet hetzelfde. Een erg klein deel zal komen van de verwaarlozing van relativiteitseffecten, maar het grootste deel komt van andere bronnen. De grootste factor hiervan is dat het α -deeltje een positief geladen heliumkern is, die dus onmiddellijk afgestoten wordt door de elektronen van het ${}_{90}^{229}\text{Th}$. Ook zendt de dochterkern gammastraling uit.

(d) Er is een licht verschil in grootteorde van de energiewaarden. X-stralen zitten meestal in de orde van 100 eV tot 100 keV, en gammastralen tussen de 10 keV en 10 MeV. Het voornaamste verschil is hun oorsprong, namelijk dat gammastraling het resultaat van nucleaire effecten en X-straling het gevolg van terugvallende geëxciteerde elektronen is.

(e) Je kan hier yappen over scintillatiedetectoren, geiger-müllertellers, *insert detector*, ... Hun werkingsprincipe is gelijkaardig. Een medium van meestal gas of andere vloeistof wordt onder hoge spanning gezet. Wanneer een deeltje straling invalt, wordt dit medium geïoniseerd en geleidt het bijgevolg. Zo kan een elektrische puls door het systeem gestuurd worden en kan de teller omhooggaan.

(f) Je lost $E = hc/\lambda$ met $E = 8.10 \text{ eV}$ op naar λ . Je vindt $\lambda = 153.5 \text{ nm}$, je hebt dus een ultravioletlaser nodig. Deze heeft helemaal geen kleur en dus is deze vraag een scam.

(g) De bandgap moet groter zijn dan 8.10 eV, je hebt dus een isolator nodig opdat het kristal geen van deze invallende fotonen zal absorberen.

⁹Natuurlijk is dit niet wat ik besloten heb op het examen, omdat in mijn ogen de uitgekomen waarde van $1.56 \times 10^7 \text{ m/s}$ gelijk was aan vijf keer de snelheid van het licht...

(h) De binding tussen Ca en F is ionisch. De valentieëlektronen van het calciumatoom worden overgenomen door de fluoratomen. Zo bereiken ze beide de edelgasconfiguratie. Doordat deze atomen ook kleine atoomstraal hebben, is de aantrekking tussen de elektronen en de kern erg groot. Dit resulteert in een hoge ionisatieënergie, zodat deze stof erg slecht zal geleiden.

Vraag 5

Beschouw in K_S^0 -deeltje in rust ten opzichte van het laboratorium. Dit kaon vervalt in een π^+ - en een π^- -deeltje.

- (a) Hoe groot is de snelheid van elk pion? De nodige informatie staat in het formulairum.

Nu vervalt het π^- ook in een μ^- en een $\bar{\nu}_\mu$.

- (b) Ga na dat de totale reactie door kan gaan.
- (c) De halfwaardetijd van een π^- bedraagt 1.804×10^{-8} s ten opzichte van het π^- -deeltje in rust. Welke fractie van de π^- -deeltjes bereikt de detector op 10 meter afstand, zoals gemeten in het laboratorium, van waar de π^- -deeltjes geproduceerd worden?

Oplossing Vraag 5

(a) De pionen zijn identiek in massa, en zullen dus elk even veel energie hebben. De totale energie van het kaon in rust is 497.7 MeV, zodat de totale energie van elk pion 248.85 MeV bedraagt. Gebruik nu

$$E = \gamma mc^2$$

met m de massa van een π^+ of een π^- . Je vindt $\gamma = 1.78$. Dan is

$$v = c\sqrt{1 + \frac{1}{\gamma^2}} = 2.48 \times 10^8 \text{ m/s} = 0.83c.$$

(b) De volledige reactie is

$$K_S^0 \rightarrow \pi^+ + \mu^- + \bar{\nu}_\mu.$$

Je kan nagaan dat $Q > 0$, zodat de reactie met het kaon in rust kan doorgaan. Er is behoud van lading, baryongetal, leptongetallen en spin. Er is enkel geen behoud van strangeness. Dit is echter helemaal geen probleem omdat er leptonen betrokken zijn, en de reactie dus enkel kan doorgaan met de zwakke interactie.

(c) De fractie wordt gegeven door

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{\ln(2)}{T_{1/2}} t}.$$

We hebben dus enkel nog de tijd dat het pion nodig heeft om tot aan de detector te geraken nodig. Dit kan je op twee manieren berekenen. Oftewel neem je het perspectief van het laboratorium, zodat de pionen tijddilatatie ondervinden, of het perspectief van een pion, zodat het laboratorium lengtecontractie ondervindt. Beide methoden zijn equivalent, want het pion zal gemiddeld langer leven dan zijn halfwaardetijd in het perspectief van een onderzoeker in het laboratorium door tijddilatatie, en in het perspectief van het pion is het laboratorium in beweging.

Hier werk ik het perspectief van het pion uit. Zo ondervindt de afstand tot de detector in dit perspectief een lengtecontractie zodat in dit perspectief de pionen nog maar $10/\gamma \text{ m} = 5.61 \text{ m}$ moeten afleggen. Aangezien het pion met een snelheid van $0.83c$ naar de detector vliegt, komt dit overeen met een tijd van $t = 2.25 \times 10^{-8} \text{ s}$, zodat

$$\frac{N}{N_0} = 42.1\%.$$