

# 1 Examen Algebra I (20 januari 2012)

## 1.1 Theorie

1. Zij  $R$  een ring,  $I$  een deelgroep van  $R, +$ . Bewijs dat  $\cdot : \frac{R}{I} \times \frac{R}{I} \rightarrow \frac{R}{I} : (\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \overline{x \cdot y}$  goed gedefinieerd is als  $I \triangleleft R$ . (schriftelijk)
2. Bewijs de stelling van Cayley: elke groep is isomorf met een permutatiegroep.
3. Zijn  $F \subseteq K \subseteq E$  velduitbreidingen. Bewijs: als  $E$  algebraïsch is over  $K$  en  $K$  over  $F$ , dan is  $E$  algebraïsch over  $F$ .

## 1.2 Oefeningen

1. Zij  $G$  een groep waarvoor  $[G : Z(G)] = 6$ . Hoeveel deelgroepen en normaaldelers heeft  $G$  die  $Z(G)$  omvatten?
2. Zij  $R$  een ring met eenheidselement (dus niet noodzakelijk commutatief),  $f \in R[X]$ . Slechts één van de volgende beweringen is waar. Bewijs die, geef een tegenvoorbeeld voor de andere en leg uit wat er precies misloopt.

$$\exists g \in R[X] : g(X - a) = f \Leftrightarrow f(a) = 0 \quad (1)$$

$$\exists g \in R[X] : (X - a)g = f \Leftrightarrow f(a) = 0 \quad (2)$$

3. (a) Hoeveel irreducibele veeltermen van graad 5 bestaan er over  $\mathbb{F}_2$ ?  
(b) Bereken de ontbindingsvelden van volgende veeltermen over  $\mathbb{Q}$  en geef ook de uitbreidingsgraad:
  - i.  $X^3 + 1$
  - ii.  $X^6 + 2X^3 - 3$
  - iii.  $X^4 - 6X^2 - 7$
4. Zij  $f : \mathbb{Z}_p[X] \rightarrow \mathbb{Z}_p^{n \times n}$  met  $n \geq 2$  een ringmorfisme,  $f(1) = I_n$ ,  $f(X) = M$ .
  - (a) Toon aan dat  $f$  volledig bepaald is door  $f(X)$ .
  - (b) Toon aan dat  $f$  nooit injectief is.
  - (c) Toon aan dat  $f$  nooit surjectief is.
  - (d) Zij  $p = 3, n = 6, f(X) = M$  met

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Geef de minimale veelterm van  $M$ . Hoeveel elementen bevat  $\text{Im}(f)$ ?