Algebra 1: Examen

19 januari 2016

1 Theorie

1. Bewijs de stelling van Cayley. (stelling gegeven)
2. Formuleer en bewijs de eerste isomorfismestelling voor ringen. (zonder die voor groepen te gebruiken)
3. Bewijs de stelling van Kronecker. (stelling gegeven)

Bijvragen : Stel $\phi : K \to L$ een ringmorfisme met $\phi(1) = 1$, wat kan je zeggen over de injectiviteit? Is de eis dat p irreducibel is nodig opdat $\frac{K[X]}{(p)}$ een veld is? Geef de definitie van de adjunct van een lineaire transformatie. Stel dat A^*, hoe ga je te werk om te bewijzen dat $(A^*)^* = A$?

2 Oefeningen

1. Zij $G, \cdot$ een groep en $n > 1 \in \mathbb{N}_0$. Definieer $H_n = \{g \in G | deordevangisn\} \cup \{e\}$.
   (a) Stel dat H_n een deelgroep is van G. Toon aan dat H_n een normaaldeler is.
   (b) Geef twee voorbeelden van een groep G zodat H_n een niet-triviale deelgroep is, een voorbeeld met G commutatief en G niet-commutatief.
   (c) Stel dat H_n een niet-triviale deelgroep is van G. Toon aan dat n een priemgetal is.
   (d) Geef een voorbeeld van een groep G en een priemgetal n zodat H_n geen deelgroep is.
2. Stel dat $R, +, \cdot$ een commutatieve ring met eenheidselement is. We noemen $r \in R$ nilpotent als er een $n \in \mathbb{N}_0$ bestaat zodat $r^n = 0$. Stel $N(R) = \{r \in R | r \text{ is nilpotent }\}$.
   (a) Stel dat R een domein is. Bepaal $N(R)$.
   (b) Toon aan dat $N(R)$ een ideaal is van R.
   (c) Wat is $N(R/N(R))$? Bewijs je antwoord.
3. Stel $F \subset E$ velden. Stel $Aut(E) = \{$ isomorfismen $\sigma : E \to E$ met $\sigma(1) = 1$. Dit is een groep voor $\circ$. Beschouw $G(E/F) = \{\sigma \in Aut(E) | \sigma(a) = a \text{ voor } a \in F\}$.
   (a) Toon aan dat $G(E/F)$ een deelgroep van $Aut(E), \circ$ is.
   (b) Bepaal $G(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q})$ en besluit dat $G(\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})/\mathbb{Q}), \circ \cong \mathbb{Z}_2, +$.

4. Stel $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ met

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$

Bepaal een matrix P en een Jordanmatrix J zodat $J = P^{-1}AP$. Bepaal ook de minimale veelterm van A. Gegeven zijn ook

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 5 & 3 & -10 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & -20 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 10 & -17 & -20 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & -15 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -5 & -10 & -1 \\ -3 & 0 & 2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 5 & -20 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$