Examen Algebra I

13/01/2020

Theorie

Vraag 1

Bewijs de stelling van Cayley (stelling werd gegeven).

Vraag 2

Bewijs de stelling van Bézout (stelling werd gegeven).

Vraag 3

a) Geef de definitie van het toegevoegde/adjunct (A^*) van een lineaire transformatie A: V$\to V$.

b) Bewijs dat als de adjuncte transformatie bestaat, deze ook uniek is.

c) Bewijs dat de adjuncte van A^*, $(A^*)^*$, gelijk is aan A.

Oefeningen

Vraag 1

Zij G een p-groep met $\mid G \mid = p^n$ voor p priem en n > 1

a) Zij N een strikte normaaldeler van van G. Toon aan dat er een $x \in Z(G/N)$ bestaat van orde p

b) Zij N een strikte normaaldeler van G. Toon aan dat er een normaaldeler M $\triangleleft$ G bestaat met $N \subseteq M \subseteq G$ en [M : N] = p

c) Toon aan dat G oplosbaar is

Vraag 2

Zij R,+,$\cdot$ een commutatieve ring met eenheidselement 1. We zeggen dat R een lokale ring is als R een uniek maximaal ideaal heeft.

a) Geef een voorbeeld (zonder c) te gebruiken) van een lokale ring en leg zorgvuldig uit.

b) Toon aan dat R een lokale ring is als en slechts als

$$I = \{r \in R \mid \text{r is geen eenheid}\}$$

een ideaal van R is. Toon ook aan dat I dan het unieke maximale ideaal is.

c) R,+,$\cdot$ is een deelring van $\mathbb{Q}, +, \cdot$ gegeven door

$$R = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid \text{b is oneven}\}$$

Is R een lokale ring? Leg uit.

Vraag 3

Beschouw het veld $E = \mathbb{Q}(\sqrt{6}i \ - \ \sqrt{5})$

a) Bepaal een basis van E als $\mathbb{Q}$-vectorruimte

b) Zoek een veelterm $f \in \mathbb{Q}$ zodat E het ontbindingsveld is van f over $\mathbb{Q}$

Vraag 4

Beschouw $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ met $A^2(A^2 - 4I) = 0$. Wat zijn de mogelijke minimale veeltermen van A^3? Geef ook telkens een voorbeeld van A en bijhorende A^3. Leg zorgvuldig uit.