

EXAMEN ALGEBRA II

3 BA Wiskunde

19 januari 2009

Naam:

- Schrijf op elk blad je naam (ook onmiddellijk op dit opgaveblad).
- Als je een vraag blanco afgeeft, noteer dan op dit opgaveblad 'blanco' naast het nummer van de vraag.
- Geef voldoende uitleg. (Vermeld de stellingen en eigenschappen die je gebruikt, argumenteer elke niet-triviale stap, geef uitleg bij je berekeningen, verzorg je taal en let op de juiste bindwoorden, ...)
- Enkel net afgeven. Antwoorden in volgorde leggen met opgaveblad bovenaan en samen nieten.

Veel succes!

- (a) Deze vraag gaat over het bewijs van Stelling 4.3.1 in het deel Galoistheorie (pagina 26). Leg in detail uit waarom de afbeelding van $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ naar $\mathbf{S}_p$ injectief is.
 - (b) Is de volgende bewering waar of vals? Motiveer in detail je antwoord.
Zij k een veld. Voor elke aftelbare deelverzameling S van $k[x, y, z]$ bestaat er een eindige deelverzameling $B \subset S$ zodat het ideaal voortgebracht door B gelijk is aan het ideaal voortgebracht door S .
- (a) Toon aan dat $i \in \mathbb{Q}(\alpha)$ (*Hint:* $(\alpha - i)^4 = 2$). Leid hieruit af dat $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$.
 - (b) Wat is de uitbreidingsgraad van $\mathbb{Q}(\alpha)$ over $\mathbb{Q}$?
 - (c) Toon aan dat $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ een Galoisuitbreiding is. Bestaat er een strikt deelveld F van $\mathbb{Q}(\alpha)$ dat niet Galois is over $\mathbb{Q}$?
 - (d) Toon aan dat $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q})$ niet commutatief is.
- (a) Zij K een veld van karakteristiek 0 en zij $f \in K[x]$ een irreducibele veelterm van graad n . Zij E een ontbindingsveld van f over K en zij $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de wortels van f in E .
 - (a) Toon aan dat de velduitbreiding $K(\alpha_1) \supset K$ Galois is als en slechts als $E = K(\alpha_1)$.
 - (b) Veronderstel dat $\text{Gal}(E/K)$ commutatief is. Toon aan dat

$$|\text{Gal}(E/K)| = n.$$

4. Zij F een veld en I een ideaal in de polynomenring $F[x_1, \dots, x_n]$. Veronderstel dat I wordt voortgebracht door *homogene* veeltermen $f_1, \dots, f_s$.

- (a) Zij f een homogene polynoom. Veronderstel dat we f met het delingsalgoritme voor een bepaalde monomenordening delen door $f_1, \dots, f_s$. We bekomen dan een schrijfwijze

$$f = a_1 f_1 + \dots + a_s f_s + r.$$

Toon aan dat $a_1, \dots, a_s$ en r homogeen zijn (of 0).

- (b) Toon aan dat er voor elke monomenordening een Gröbnerbasis voor I bestaat die enkel homogene polynomen bevat.
- (c) Bestaat de unieke gereduceerde Gröbnerbasis van I voor elke monomenordening uit homogene polynomen? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.