Algebra I

examen 13 januari 2010

Theorie

$\boxed{1}$ Zij $G, *$ een eindige groep en X een verzameling. Veronderstel dat G op X werkt via de actie
$$\cdot : G \times X \to X : (g, x) \mapsto g \cdot x.$$

a) Neem $x \in X$. Definieer de baan van x en de stabilisator van x.

b) Formuleer en bewijs de orbietstelling.

$\boxed{2}$ a) Geef de definitie van een hoofdideaaldomein.

b) Zij F een veld. Bewijs dat de veeltermenring $F[X]$ van F een hoofdideaal is.

$\boxed{3}$ a) Zij E een eindige velduitbreiding van F. Bewijs dat E algebraïsch is over F.

b) Geef een voorbeeld van een oneindige velduitbreiding die algebraïsch is.

Oefeningen

$\boxed{1}$ Zij G een eindige groep en H, K twee verschillende deelgroepen van index 2.

a) Bewijs dat $H \cap K \lhd G$.

b) Toon aan dat $\frac{G}{H \cap K}$ niet cyclisch is.

$\boxed{2}$ a) Zij $a \in \mathbb{R}$. Hoeveel idealen heeft de ring $\frac{\mathbb{R}[X]}{(X^2-a)}$? Hint: beschouw de gevallen $a < 0$, $a = 0$ en $a > 0$ apart.

b) Geef een voorbeeld van een ring met precies drie priemidealen.

$\boxed{3}$ Beschouw de veelterm $f = X^4 + X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Zij L het ontbindingsveld van f over $\mathbb{Q}$.

a) Toon aan dat er een wortel α van f bestaat zo dat $L = \mathbb{Q}(\alpha)$.

b) Geef de minimale veelterm van α en bepaal $[L : \mathbb{Q}]$.

$\boxed{4}$ Zij $A \in C^{n \times n}$, $f_A = (X - i)\phi_A$ en $\phi_A^2 = (X^2 + 1)f_A$. Bereken f_A en ϕ_A, en geef de Jordanvorm van A.

⋆ ⋆ ⋆