

Algebra I

Proffessor = veys

28 August 2020

Omwille van corona was dit de eerste aangepaste versie en was algebra van een 5 uur examen naar 3 uur overgeschakeld. De theorie was ook open boek.

1 Theorie

- 1.6.1 waarom is $G_0 \setminus G_1$ enkelvoudig?
- 2.4.16 waarom gebruiken we hier wel een u_i en in de voorgaande 2.4.15 niet? (eigenlijk het vraagje onder de kader dus)
- 3.3.9 onderste bolletje zelf bewijzen/aantonen
- Als $F \subset L$ transcendent en $L \subset E$ algebraïsch. Is dan $F \subset E$ algebraïsch transcendent of beide? Bewijs en of geef tegenvoorbeeld

2 Oefeningen

2.1

$G, \cdot$ willekeurige groep. Net zoals in de eindige groep is het aantal linkernevenklassen van een deelgroep H in G de index $[G:H]$ van H in G . De index van een deelgroep is dus een niet nul natuurlijk getal of oneindig.

- $H \subset G$ eindige deelgroep van G met $g \in G$. Neem de deelverzameling $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} | h \in H\}$ van G TB: gHg^{-1} een deelgroep van G en gHg^{-1} eindige index in G .

Hint: definieer een bijectie van verzameling van linkse nevenklassen van H naar verzameling van linkse nevenklassen van gHg^{-1}

Zeg $A(G)$ doorsnede van alle deelgreppen van G met een eindige index.

- Stel G eindig. Bepaal dan $A(G)$ en concludeer dat dit een normale deelgroep is.
- Toon aan dat $A(G)$ oneindige groep G ook normale deelgroep zal zijn

2.2

- $S, \cdot$ commutatieve ring met R een deelring van S . $I \triangleleft S$ priemideaal van S met $I \cap R \neq R$. Is dan $R \cap I$ een priemideaal van R ? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld
- $S, +$ commutatieve ring met $R \subset S$ $I \triangleleft S$ een maximaal ideaal van S met $I \cap R \neq R$. Geef een tegenvoorbeeld dat dit niet altijd terug een maximaal ideaal moet zijn.
- Zeg de ring $\frac{\mathbb{Z}_3[X]}{x^3+2x+2}$. Is deze ring een veld? Zoja met welk bekend veld is dit isomorf zoneen leg duidelijk uit waarom dit niet geldt.
- $x^3 + 2x^2 + x + 1$ heeft dit een wortel in de ring uit deelvraag c? Leg dit duidelijk uit waarom wel of niet. Je hoeft geen expliciete wortel te geven.

2.3

$$A \in \mathbb{C}^{6 \times 6} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vind de inverteerbare matrix P zodat $J = PAP^{-1}$ en geef J en geef de minimale veelterm. Gegeven

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$