Examen Algebraïsche Structuren

23 Juni 2016

1 Theorievragen

1.1 Vraag 1

Wat is de meest algemene voorwaarde die we in de cursus hebben gezien zodat een vectorruimte isomorf is met zijn duale ruimte? Geef en bewijs. Is de vectorruimte $\mathbb{R}[X]$ isomorf met zijn duale ruimte?

1.2 Vraag 2

Geef en bewijs de stelling van Wilson.
Bijvraag: Iemand versleutelt een boodschap met de publieke sleutel (e, n), hoe ontcijfer je die?

2 Oefeningen

2.1 Vraag 3

Bewijs dat ggd $(2016, 2017^{2017} + 2018^{2018}) = 1$.

2.2 Vraag 4

Zij $G, \cdot$ een groep en x een element van G, dan definiëren we de stabilisator van x als

$$\text{Stab}(x) = \{\, y \in G \mid y \cdot x \cdot y^{-1} = x \,\}\,.$$

(i) Geef een voorbeeld van een groep G en een element x waarvoor Stab$(x) \neq G$.

(ii) Bewijs dat voor elk element $x \in G$, Stab(x) een deelgroep is van G.

(iii) Bewijs dat voor elke $x, y \in G$ geldt dat

$$\text{Stab}(y \cdot x \cdot y^{-1}) = y \cdot \text{Stab}(x) \cdot y^{-1}.$$

2.3 Vraag 5

Zij V een vectorruimte over een veld K met een symmetrische bilineaire vorm $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Definieer dan voor elke $v \in V$ de afbeelding

$$l_v : V \to K : w \mapsto \langle v, w \rangle .$$

Beschouw dan nu de afbeelding

$$f : V \to V^* : v \to l_v.$$

(i) Bewijs dat f een lineaire afbeelding is.

(ii) Bewijs dat f surjectief is als en slechts als $\langle \cdot, \cdot \rangle$ niet-singulier is.