Examen G081: Algebraïsche Meetkunde 12 juni 2006, lokaal B01.07

ALGEMEEN

- Alle variëteiten zijn over een willekeurig algebraïsch afgesloten veld k, tenzij anders vermeld.
- De opgaven zijn verdeeld in twee rubrieken (Theorievragen, Oefeningen) die elk onderverdeeld zijn in categorieën gebaseerd op de door ons ingeschatte moeilijkheidsgraad.
- Uitspraken die in de ene opgave moeten worden aangetoond, kunnen nuttig zijn in een latere opgave; natuurlijk mag je deze uitspraken ook gebruiken als je de eerdere opgave niet of onvolledig gemaakt hebt.
- Illustraties zijn altijd welkom.
- Voor de theorievragen krijg je 1,5 uur de tijd. Deze zullen vervolgens opgehaald worden. *Zorg dus dat je de theorievragen en oefeningen op verschillende blaadjes maakt.* Tijdens de rest van het examen zullen jullie één voor één uitgenodigd worden voor een korte een mondelinge bespreking van de theorievragen.

THEORIEVRAGEN

Categorie I.

1. Bewijs of weerleg dat elke open overdekking van een quasi-affiene variëteit uitgedund kan worden tot een eindige deeloverdekking.
2. Bewijs of weerleg dat een morfisme $f\colon X \to Y$ van (niet-lege) affiene variëteiten gesloten is (dwz. dat voor elk gesloten $Z \subset X$ het beeld $f(Z)$ gesloten is in Y).
3. Zij $Y \subset \mathbb{P}^n$ een niet-lege projectieve variëteit.
   (a) Bewijs of weerleg dat de affiene kegel $Y^a \subset \mathbb{A}^{n+1}$ irreducibel is als en slechts als Y irreducibel is.
   (b) Bewijs of weerleg dat de projectieve sluiting $\overline{Y^a}$ van Y^a irreducibel is als en slechts als Y irreducibel is.
   (c) Bewijs of weerleg dat de affiene kegel van Y glad is als en slechts als Y glad is.

Categorie II.

4. Zij $V \subset \mathbb{P}^n$ een irreducibele varieteit met ideaal $I(V)$ voorgebracht door de homogene polynomen $f_1, \dots, f_l \in k[x_0, \dots, x_n]$.
   Laat zien dat V glad is van dimensie d als en slechts als de $l \times (n+1)$ matrix
   $$J_{\text{hom}}(P) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P) \right)_{\substack{i=1,\dots,l \\ j=0,\dots,n}}$$
   rang $n-d$ heeft in alle punten $P \in V$.
   Hint: Voor $P \in V_m = V \cap U_m$ kun je met behulp van de formule van Euler aantonen dat de rang van de $l \times (n+1)$ matrix $J_{\text{hom}}(P)$ gelijk is aan de rang van de $l \times n$ matrix
   $$J_m(P) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(\tfrac{P_0}{P_m}, \tfrac{P_1}{P_m}, \dots, \tfrac{P_n}{P_m}\right) \right)_{\substack{i=1,\dots,l \\ j \neq m}}$$
5. Zij $C \subset \mathbb{A}^n$ een gladde irreducibele kromme en zij $I(C)$ voorgebracht door $f_1, \dots, f_l \in k[x_1, \dots, x_n]$.
   (a) Laat zien dat $l \geq n-1$.
   (b) Laat zien dat in een punt $P = (P_1, \dots, P_n)$ de afbeelding
   $$\begin{array}{rccc} dx_m\colon & T_P C & \to & k, \\ & (\xi_1, \dots, \xi_n) & \mapsto & (\xi_m - P_m), \end{array}$$

een isomorfisme is van vectorruimten als en slechts als de $l \times (n-1)$ matrix

$$J_{\hat{m}} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P) \right)_{\substack{i=1,\ldots,l \\ j \neq m}}$$

rang $n-1$ heeft.

Met andere woorden: $(x_m - P_m)$ *is een lokale parameter in* P *als en slechts als* $J_{\hat{m}}$ *rang* $n-1$ *heeft.*

Oefeningen

Categorie I.

6. Zij k een algebraïsch afgesloten veld van karakteristiek ongelijk aan 2 of 3. Zij $C \subset \mathbb{P}^3$ de irreducibele variëteit gegeven door het stelsel

$$S\colon \begin{cases} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \\ x_0^2 + x_2 x_3 = 0. \end{cases}$$

Je mag zonder bewijs gebruiken dat C *irreducibel is.*

(a) Laat zien dat C de doorsnijding is van een gladde kwadriek met een singuliere kwadriek.
Je hoeft de irreducibiliteit van de kwadrieken niet aan te tonen.

(b) Laat zien dat C glad is en van dimensie 1. Geef duidelijk aan waar je gebruikt dat de karakteristiek ongelijk is aan 2 of 3.

Schrijf $C_i = C \cap U_i$.

(c) Laat zien dat $C = C_2 \cup C_3$.

(d) Laat met behulp van de stelling van Bézout voor vlakke krommen zien dat voor elk hypervlak $H \subset \mathbb{P}^3$ geldt dat $H \cap C$ bestaat uit maximaal 4 punten en dat het exact 4 punten zijn als de doorsnijding in elk punt $P \in C \cap H$ transversaal is (wat in dit geval wil zeggen dat $T_P C \cap T_P H = \{P\}$).
Je mag zonder bewijs gebruiken dat $C \not\subset H$.

(e) Laat zien dat $C \cap V(x_0)$ en $C \cap V(x_1)$ beide uit 4 punten bestaan en dat

$$C \cap V(x_0) = C \cap (V(x_2) \cup V(x_3))$$

(als we zonder multipliciteit tellen).

Categorie II.

7. Zij $C \subset \mathbb{P}^3$ (en ook k) als in Opgave 6. We schrijven $x = \frac{x_0}{x_3}$, $y = \frac{x_1}{x_3}$, $z = \frac{x_2}{x_3}$ voor de standaard coördinaten op U_3 en $u = \frac{x_0}{x_2}$, $v = \frac{x_1}{x_2}$, $w = \frac{x_3}{x_2}$ voor de standaard coördinaten op U_2.

(a) Laat zien dat voor $P = (P_x, P_y, P_z) \in C_3$ het volgende geldt:
- $(x - P_x)$ is een lokale parameter als $P_y \neq 0$,
- $(y - P_y)$ is een lokale parameter als $P_x(1 - 2P_z) \neq 0$,
- $(z - P_z)$ is een lokale parameter als $P_x P_y \neq 0$,

en ook dat voor $Q = (Q_u, Q_v, Q_w) \in C_2$ geldt dat
- $(u - Q_u)$ een lokale parameter is als $Q_v \neq 0$.

(b) Laat zien dat $dz = -2x\,dx = \dfrac{2y}{1-2z}dy = \dfrac{2}{u^3}du$ in $\Omega^1(C)$.

(c) Bepaal het geslacht van de kromme C door de graad van een kanonieke divisor te bepalen.

(d) (BONUS) Toon aan dat $k(C) \simeq k(x)(\sqrt{1+x^2+x^4})$ en gebruik dit om een $t \in k(C)$ en een derdegraads veelterm $g(t) \in k[t]$ te vinden met $k(C) \simeq k(t)(\sqrt{g(t)})$.
Hint: bekijk $t = 1/(x - \alpha)$ *met* $\alpha \in k$ *een wortel van* $1 + x^2 + x^4$.
Toon hiermee aan dat C birationaal is met een gladde derdegraadskromme $C' \subset \mathbb{P}^2$. Betekent dit ook dat C isomorf is met C'?