Theorie

Vraag 1

Wat is de meest algemene voorwaarde die we in de cursus hebben gezien zodat een vectorruimte isomorf is met zijn duale ruimte? Geef en bewijs.
Bijvraag: Is de vectorruimte R[X] isomorf met zijn duale ruimte?

Vraag 2

Zij n en m $\in \mathbb{N}_0$. Onder welke voorwaarden is $\theta : \mathbb{Z}_{nm} \to \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m : [x]_{nm} \to ([x]_n, [x]_m)$ een isomorfisme van ringen. Bewijs.

Oefeningen

Vraag 1

$n\mathbb{Z} = \{nz \mid z \in \mathbb{Z}\}$ is een deelgroep van $\mathbb{Z}$ met $n \in \mathbb{N}$.

a) Bewijs dat $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \{nz_1 + mz_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\}$ ook een deelgroep is van $\mathbb{Z}$.

b) Bewijs dat elke deelgroep van $\mathbb{Z}$ van de vorm $k\mathbb{Z}$ is.

c) We hebben nu bewezen dat elke deelgroep van $\mathbb{Z}$ van de vorm $k\mathbb{Z}$ is en dat $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z}$ een deelgroep van $\mathbb{Z}$ is. Vind nu k in functie van n en m zodat $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = k\mathbb{Z}$.

Vraag 2

Toon aan dat voor elke oneven $n \in \mathbb{N}$ geldt:
$a^{3(n+1)^2+1} \equiv a \bmod 21$.

Vraag 3

Zij V een vectorruimte met een symmetrische bilineaire vorm $\langle \cdot, \cdot \rangle$. De matrix van deze bilineaire vorm t.o.v de standaardbasis is

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Bereken een basis van V zodat de matrix t.o.v die basis een diagonaalmatrix is.

b) Bereken de signatuur van deze matrix.