

Examen Analyse II

Leuven, 11 januari 2010

Enige toelichting

- Je krijgt **4 uur** voor dit examen. Je mag tussendoor eten of drinken.
- Na **2 uur** geef je de antwoorden van vragen 1 en 2 af. Het derde en vierde uur werk je verder aan de overige vragen en komt iedereen bij mij voor mondelinge ondervraging over vragen 1 en 2. **Na 4 uur examen geeft iedereen alles af.**
- Het examen is **open boek**. Dit wil zeggen dat je mag gebruik maken van
 - je cursus,
 - je eigen notities afkomstig uit de les, de oefenzitting of je studie thuis,
 - eventueel andere cursussen uit de eerste of tweede bachelor.

Dit wil zeggen dat je **geen gebruik** mag maken van

- een zakrekenmachine of draagbare computer,
- boeken of fotocopieën uit boeken.

Schrijf op elk blad je naam.

Hou je studentenkaart klaar.

Veel succes!

Stefaan Vaes

1. Op regels 3 en 4 van pagina 125 staat het volgende.

Het Lemma van Riemann-Lebesgue leert ons dat deze laatste uitdrukking naar nul convergeert als $n \rightarrow \infty$.

Geef een nauwkeurig bewijs voor deze bewering.

2. Definieer voor alle $x \in \ell^1(\mathbb{N})$

$$\|x\| := \|x\|_1 + \|x\|_2 .$$

a) Toon aan dat $\|x\| < \infty$ voor alle $x \in \ell^1(\mathbb{N})$.

b) Is $\ell^1(\mathbb{N})$ uitgerust met deze nieuwe norm $\|\cdot\|$ volledig? Verantwoord je antwoord.

3. Zij $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Veronderstel dat g totaal afleidbaar is, dat $f(0) = g(0)$ en dat

$$f(x) = g(x) + o(\|x\|) \quad \text{als } \|x\| \rightarrow 0 .$$

a) Is f automatisch totaal afleidbaar in 0?

b) Is f automatisch totaal afleidbaar in punten verschillend van 0?

Verantwoord je antwoord nauwkeurig.

4. Toon nauwkeurig aan dat een cirkel in het vlak (niet de ganse schijf!) een meetbare verzameling van maat nul is. Gebruik alleen resultaten uit de cursus en citeer deze resultaten expliciet.

5. Definieer het oppervlak $\mathcal{O}$ als doorsnede van de kegel

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq (1 - z)^2 \quad \text{en} \quad 0 \leq z \leq 1\}$$

en het vlak met vergelijking $y + z = 0$. Verifieer de Stelling van Stokes voor het oppervlak $\mathcal{O}$ en het vectorveld $\mathbf{V}(x, y, z) = (1 + y, 0, 0)$.

De volgende tekening kan je helpen om het oppervlak $\mathcal{O}$ te begrijpen, maar is enkel een schets en zeker geen schaalmodel.

