Examen Analyse II

Leuven, 27 januari 2010

Enige toelichting

- Je krijgt **4 uur** voor dit examen. Je mag tussendoor eten of drinken.
- Na **2 uur** geef je de antwoorden van vragen 1 en 2 af. Het derde en vierde uur werk je verder aan de overige vragen en komt iedereen bij mij voor mondelinge ondervraging over vragen 1 en 2. **Na 4 uur examen geeft iedereen alles af.**
- Het examen is **open boek**. Dit wil zeggen dat je mag gebruik maken van
  - je cursus,
  - je eigen notities afkomstig uit de les, de oefenzitting of je studie thuis,
  - eventueel andere cursussen uit de eerste of tweede bachelor.

  Dit wil zeggen dat je **geen gebruik** mag maken van
  - een zakrekenmachine of draagbare computer,
  - boeken of fotocopies uit boeken.

Schrijf op elk blad je naam.

Hou je studentenkaart klaar.

Veel succes! Stefaan Vaes

1. Op regels 2 tot en met 5 op pagina 135 staat het volgende.

   Uit de gedomineerde convergentiestelling volgt dat $\|\widehat{f}\, g_A - \widehat{f}\|_1 \to 0$ als $A \to +\infty$. Dan volgt dat $(\widehat{f}\, g_A)^\vee \to (\widehat{f})^\vee$ uniform.

   Leg deze twee beweringen nauwkeurig uit.

2. Zij $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij reëele getallen. Definieer de functie
$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} : f(x) = a_n \text{ als } n \le x < n+1 \text{ en } n \in \mathbb{N} .$$
   a) Veronderstel dat $a_n \ge 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Geef een formule voor $\displaystyle\int_0^{+\infty} f\, d\lambda$ en bewijs deze formule nauwkeurig.

   b) Veronderstel dat $a_n \in \mathbb{R}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Onder welke voorwaarde is f integreerbaar?

3. Beschouw de Banachruimte $X = C([0,1], \mathbb{C})$ zoals in Voorbeeld 3.2. Definieer de lineaire afbeelding
$$\omega : X \to \mathbb{C} : \omega(f) := -f(0) + \int_0^1 f(x)\, dx .$$
   Bereken $\|\omega\|$. Je kan ook al punten verdienen door een boven- en/of een ondergrens voor $\|\omega\|$ te bepalen.

4. Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een C^1-functie met $(df)(x,y) \ne 0$ voor alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Toon aan dat $f(\mathbb{R}^2)$ open is.

   Hints. Probeer rond elk punt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ een open omgeving $\mathcal{U}$ te construeren waarop je oefening 1.47 kan toepassen om aan te tonen dat $f(\mathcal{U})$ open is. Je mag het resultaat van oefening 1.47 zonder bewijs gebruiken.

5. Definieer het oppervlak
$$\mathcal{O} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 = (1-z)^2 \quad \text{en} \quad z \le 1 ,\ y + z \ge 0 \} .$$
   Verifieer de Stelling van Stokes voor het oppervlak $\mathcal{O}$ en het vectorveld $\mathbf{V}(x,y,z) = (0,x,0)$.

   Hint. Het oppervlak $\mathcal{O}$ is een deel van een kegelmantel en bestaat dus uit allemaal lijnstukken. Bijgevolg kan je $\mathcal{O}$ parametriseren door deze lijnstukken te doorlopen.

   De volgende tekening kan je helpen om het oppervlak $\mathcal{O}$ te begrijpen, maar is enkel een schets en zeker geen schaalmodel.