Examen Analyse II

Kortrijk, 28 januari 2010

Enige toelichting

- Je krijgt **4 uur** voor dit examen. Je mag tussendoor eten of drinken.
- Na **2 uur** geef je de antwoorden van vragen 1 en 2 af. Het derde en vierde uur werk je verder aan de overige vragen en komt iedereen bij mij voor mondelinge ondervraging over vragen 1 en 2. **Na 4 uur examen geeft iedereen alles af.**
- Het examen is **open boek**. Dit wil zeggen dat je mag gebruik maken van
  - je cursus,
  - je eigen notities afkomstig uit de les, de oefenzitting of je studie thuis,
  - eventueel andere cursussen uit de eerste of tweede bachelor.

  Dit wil zeggen dat je **geen gebruik** mag maken van
  - een zakrekenmachine of draagbare computer,
  - boeken of fotocopies uit boeken.

Schrijf op elk blad je naam.

Hou je studentenkaart klaar.

Veel succes! Stefaan Vaes

1. Het bewijs van Lemma 4.37 is wel erg bondig opgeschreven. Geef een gedetailleerd bewijs waarin je alle stappen verantwoordt.

2. Zij $\alpha_n > 0$ een rij van strikt positieve getallen. Definieer de functie

$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} (x-n)^{-\alpha_n} - 1 & \text{als } n < x < n+1, n \in \mathbb{N}, \\ \text{willekeurig} & \text{als } x \in \mathbb{N} \,. \end{cases}$$

   a) Beïnvloedt de keuze van de functiewaarden $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, de integreerbaarheid van f?
   b) Kan je de rijen $\alpha_n > 0$ en $f(n)$ zodanig kiezen dat f integreerbaar wordt?

   Bewijs al je beweringen nauwkeurig.

3. Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ een C^1-functie. Toon aan dat er een $M > 0$ bestaat zodat

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|$$

   voor alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ die voldoen aan $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$. Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat we de voorwaarden $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$ niet mogen weglaten.

4. Definieer de deelvectorruimte $K \subset \ell^2(\mathbb{N})$ als

$$K := \{x \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid x(2n+1) = x(2n) \text{ voor alle } n \in \mathbb{N}\} \,.$$

   Noteer met p_K de orthogonale projectie van $\ell^2(\mathbb{N})$ op K. Bepaal $(p_K(x))(2n)$ voor willekeurige $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ en $n \in \mathbb{N}$. Bewijs je formule.

5. Construeer het volume K als unie van alle lijnstukken die het punt $(0, 0, 1)$ verbinden met punten op de halve sfeer gegeven door

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{en} \quad z \leq 0\} \,.$$

   Verifieer de divergentiestelling voor het volume K en het vectorveld $\mathbf{V}(x, y, z) = (0, 0, z)$.

   De volgende tekening kan je helpen om het volume K te begrijpen, maar is enkel een schets en zeker geen schaalmodel.