Analyse II

examen 11 januari 2010

$\boxed{1}$ Op regels 3 en 4 van pagina 125 staat het volgende:

Het Lemma van Riemann-Lebesgue leert ons dat deze laatste uitdrukking naar nul convergeert als $n \to \infty$.

Geef een nauwkeurig bewijs voor deze bewering.

$\boxed{2}$ Definieer voor alle $x \in \ell^1(\mathbb{N})$

$$\|x\| := \|x\|_1 + \|x\|_2.$$

a) Toon aan dat $\|x\| < \infty$ voor alle $x \in \ell^1(\mathbb{N})$.

b) Is $\ell^1(\mathbb{N})$ uitgerust met deze nieuwe norm $\|\cdot\|$ volledig? Verantwoord je antwoord.

$\boxed{3}$ Zij $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Veronderstel dat g totaal afleidbaar is, dat $f(0) = g(0)$ en dat

$$f(x) = g(x) + o(\|x\|) \quad \text{als} \quad \|x\| \to 0.$$

a) Is f automatisch totaal afleidbaar is 0?

b) Is f automatisch totaal afleidbaar in punten verschillend van 0?

Verantwoord je antwoord nauwkeurig.

$\boxed{4}$ Toon nauwkeurig aan dat een cirkel in het vlak (niet de ganse schijf!) een meetbare verzameling van maat nul is. Gebruik alleen resultaten uit de cursus en citeer deze resultaten expliciet.

$\boxed{5}$ Definieer het oppervlak Ω als doorsnede van de kegel

$$K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq (1 - z)^2 \quad \text{en} \quad 0 \leq z \leq 1\}$$

en het vlak met vergelijking $y + z = 0$. Verifieer de Stelling van Stokes voor het oppervlak Ω en het vectorveld $\mathbf{V}(x, y, z) = (1 + y, 0, 0)$. (Er was een tekening gegeven om je te helpen het oppervlak te begrijpen.)

⋆ ⋆ ⋆