Examen Analyse II

11 januari 2016

1. We bekijken voor elke $\alpha > 0$ de functie

$$\xi_\alpha : \mathbb{R} \to [0, +\infty) : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} & \text{als } x \in [-\alpha, \alpha] \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

   Bereken$||\xi_\alpha||_1$ en $||\xi_\alpha||_2$.
   Geef en bewijs een formule voor $\lim_{\alpha \to +\infty} < \eta, \xi_\alpha >$ voor een willekeurige $\eta \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

2. We definiëerden het convolutieproduct voor 2 functies uit $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ als

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dx$$

   voor de x waarvoor deze uitdrukking goed gedefiniëerd was. Geef een voorbeeld dat toont dat deze uitdrukking niet persé voor alle $x \in \mathbb{R}$ goed gedefiniëerd moet zijn.

3. Waar is $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x|x - y|$ totaal afleidbaar? Bepaal de totale afgeleide. Bewijs nauwkeurig.

4. Voor welke waarde van $\alpha > 0$ is de volgende functie integreerbaar?

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}(1 + x^\alpha)}$$

   Bepaal ook

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1 + x^\alpha)} dx$$

5. Zij f een 2π-periodische, integreerbare functie. Toon aan dat

$$|f(x)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f(n)}| \qquad \text{voor bijna alle } x \in \mathbb{R}$$

   Geldt dit ook voor alle $x \in \mathbb{R}$? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.