

Examen Analyse II

Leuven, 16 januari 2020

Enige toelichting

- Je krijgt **4 uur** voor dit examen. Je mag tussendoor eten of drinken.
- Na **2 uur** geef je het antwoord van vraag 1 af. Het is natuurlijk aan te raden om tijdens de eerste twee uur ook al te werken aan de overige vragen. Het derde en vierde uur werk je verder aan de overige vragen en komt iedereen bij mij voor mondelinge ondervraging over vraag 1. **Na 4 uur examen geeft iedereen alles af.**

- Het examen is **open boek**. Dit wil zeggen dat je mag gebruik maken van

- je cursus,
- je eigen notities afkomstig uit de les, de oefenzitting of je studie thuis,
- eventueel andere cursussen uit de eerste of tweede bachelor.

Dit wil zeggen dat je **geen gebruik** mag maken van

- een zakrekenmachine of draagbare computer,
- boeken of fotokopieën uit boeken.

- Dit examen telt mee voor 18 van de 20 punten. De overige 2 van de 20 punten werden tijdens het semester verdiend met het huiswerk. De 18 punten van dit examen zijn als volgt verdeeld: vraag 1 op 4 punten, vraag 2 op 4 punten, vraag 3 op 5 punten en vraag 4 op 5 punten.

Schrijf op elk blad je naam.

Hou je studentenkaart klaar.

Veel succes!

Stefaan Vaes

Opgepast: de vierde vraag staat op de volgende pagina !

1. Zij $P \in \mathbb{R}[X]$ een veelterm. Voor welke $\alpha \in \mathbb{R}$ is de functie

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \frac{P(\sin x)}{x^\alpha}$$

integreerbaar? Bewijs je antwoord nauwkeurig.

2. Zij $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ een afleidbare functie met $f'(0) < 0$, $f(0) = 1$ en $0 < f(x) < 1$ voor alle $x \in (0, 1]$. Bepaal de limiet

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(f\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n dx$$

en bewijs je antwoord nauwkeurig.

Hint: Laat je inspireren door het bewijs van limiet (2.4) op pagina 72 van de cursus. Breid $\ln(f(y))/y$ uit tot een continue functie op $[0, 1]$ die op het ganse interval $[0, 1]$ strikt negatief is.

3. Zij $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ een C^1 -afbeelding en veronderstel dat $(dF)(x, y, z) \neq 0$ van zodra $F(x, y, z) = 0$. Definieer $\mathcal{O} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$.

Bewijs dat elk punt van $\mathcal{O}$ een omgeving heeft die eruit ziet als een stuk van het xy -vlak in $\mathbb{R}^3$. Dit betekent nauwkeuriger gezegd dat je moet bewijzen dat er voor elk punt $(a, b, c) \in \mathcal{O}$ open delen $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ bestaan en een bijectieve C^1 -afbeelding $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ met C^1 -inverse zodanig dat $(0, 0, 0) \in \mathcal{U}$, $(a, b, c) \in \mathcal{V}$ en $\mathcal{O} \cap \mathcal{V} = \varphi(\mathcal{U} \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}))$.

4. Definieer voor alle $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$ de vectoren $e_{n,m} \in L^2([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$ gegeven door

$$e_{n,m}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{inx} e^{imy}.$$

- (a) Bewijs dat $(e_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2}$ een orthonormale basis van $L^2([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$ is. Je mag hierbij zonder dit te bewijzen gebruik maken van het feit dat functies van de vorm

$$(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^k F_i(x) G_i(y) \quad \text{met } F_i, G_i \in L^2([0, 2\pi]),$$

dicht zijn in $L^2([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$.

In de rest van deze vraag is $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ een functie die 2π -periodisch is in beide variabelen. Dit wil zeggen dat

$$f(x + 2\pi, y) = f(x, y) = f(x, y + 2\pi) \quad \text{voor alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (b) Veronderstel dat f integreerbaar is op $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Geef een definitie voor de Fouriercoëfficiënten $\widehat{f}(k, l)$ met $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$.
- (c) Veronderstel dat f kwadratisch integreerbaar is op $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Bewijs nauwkeurig dat de functies

$$s_{n,m}(x, y) = \sum_{k=-n}^n \sum_{l=-m}^m \widehat{f}(k, l) e^{ikx} e^{ily}$$

voldoen aan $\|f - s_{n,m}\|_2 \rightarrow 0$ als $n, m \rightarrow +\infty$. Geef en bewijs een formule voor $\|f\|_2$ in termen van de Fouriercoëfficiënten $\widehat{f}(k, l)$.

- (d) Veronderstel dat f een C^2 -functie is. Geef en bewijs een formule voor $\widehat{\partial_{12}f}(k, l)$. Bewijs dat

$$\sum_{k,l=-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(k, l)| < +\infty.$$