Analyse

examen 20 juni 2008 (voormiddag)

$\boxed{1}$ Bewijs stelling II.6.3.2 (Insluitstelling) voor het geval $a = -\infty$ en de limieten van f en g eindig. Doe dit door enkel op de definitie van een limiet te steunen.

$\boxed{2}$ Beschouw een functie $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die (complex) afleidbaar is. Mogen we dan besluiten dat Re f en Im f ook (complex) afleidbaar zijn?

$\boxed{3}$ Beschouw $(f_n)_n$, een rij van functies van $A \subseteq \mathbb{C}$ naar $\mathbb{C}$. Bewijs het volgende: $\sum_{k=0}^{\infty} f_n$ is uniform convergent in A a.s.a.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in A, \forall n, p \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{j=n}^{n+p} f_j(x) \right| < \varepsilon.$$

$\boxed{4}$ Zij A een deel van $\mathbb{R}^p$ met de euclidische metriek. Stel dat A compact is. Zit er dan altijd een x in A waarvoor geldt dat

$$\|x\| = \sup \{\|y\| \mid y \in A\}?$$

$\boxed{5}$ Zij (X, d_1) en (X, d_2) metrische ruimten waarbij d_1 topologisch fijner is dan d_2. Beschouw Y als deel van X. Is er een verband tussen d_1-samenhangendheid en d_2-samenhangendheid? Bewijs dit formeel, en illustreer met een voorbeeld.