Examen Analyse

30/01/2020

Vraag 1
Definieer de deelverzameling $K \subset L^2(\mathbb{R})$ als

$$K = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ en } f(x) \in \mathbb{R} \text{ voor bijna alle } x \in \mathbb{R}\}$$

1. Zij $f \in L^2(\mathbb{R})$, bewijs dat: $\quad f \in K \Longleftrightarrow \langle f, g\rangle \in \mathbb{R} \quad \forall g \in K$
2. Bewijs dat K een gesloten en convexe deelverzameling van $L^2(\mathbb{R})$ is.
3. Zij $f \in L^2(\mathbb{R})$, welk element van K ligt het dichtst bij f? Wat is de afstand van f tot dat element?

Vraag 2
Voor welke waarden van $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ en $\gamma > 0$ is de functie

$$f :]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R} : x \to \frac{(\ln(\frac{\pi}{2x}))^\gamma}{(\sin(x))^\alpha (\cos(x))^\beta}$$

integreerbaar? Bewijs nauwkeurig.

Vraag 3
Zij $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ een injectieve C^1-afbeelding en veronderstel dat de matrix $(d\Psi)(x, y)$ rang twee heeft voor alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Definieer $\Omega = \Psi(\mathbb{R}^2)$, veronderstel dat de bijectie $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \Omega$ een continu invers heeft.
Bewijs dat elk punt van Ω een omgeving heeft die er uit ziet als een stuk van het xy-vlak in $\mathbb{R}^3$. Nauwkeuriger gezegd: Bewijs dat er voor elk punt $(a, b, c) \in \Omega$ open delen $U, V \subset \mathbb{R}^3$ bestaan en een bijectieve C^1-afbeelding $\phi : U \to V$ met een C^1 inverse zodanig dat $(0, 0, 0) \in U$ en $(a, b, c) \in V$ en $\Omega \cap V = \phi(U \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}))$

Vraag 4

1. Vind voor alle $A, B > 0$ een functie $D_{A,B} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zodanig dat

$$\int_{-A}^{B} \widehat{f}(t)e^{2\pi i x t}dt = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)D_{A,B}(y)dy$$

   Voor alle integreerbare functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

2. Bewijs dat

$$\lim_{A,B\to+\infty} \int_{-1}^{1} D_{A,B}(x)dx = 1$$

   Hint: Bewijs de gelijkheid

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{2\pi i A x}-1}{2\pi i x}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi A}^{2\pi A} \frac{\sin(x)}{x}dx$$

   en maak gebruik van de oneigenlijke integraal die je in de oefenzittingen bewezen hebt en hier dus niet opnieuw moet bewijzen.

3. Zij $\delta>0$ en $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integreerbaar. Veronderstel dat f continu is in 0 en dat $|f(x)-f(0)| = O(|y|^{\delta})$ voor $|y| \to 0$. Bewijs dat $\widehat{f}$ oneigenlijk integreerbaar is en dat de oneigenlijke integraal gelijk is aan $f(0)$.

4. Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat onder voorwaarden van stelling 4.29 op p144 niet noodzakelijk geld dat $\widehat{f}$ oneigenlijk integreerbaar is.