Analyse II

13 januari 2021

Vraag 1

Zij $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een functie die totaal afleidbaar is in $(0,0)$ en voldoet aan $f(0,0) = 0$.

(a) Bewijs dat er een $M > 0$ en een $\delta > 0$ bestaat zodat $|f(x,y)| \leq M \|(x,y)\|$ van zodra $\|(x,y)\| \leq \delta$.

(b) Veronderstel dat f daarenboven begrensd en meetbaar is. Zij $\alpha < 3$ (en dus eventueel negatief). Bewijs nauwkeurig dat de functie

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : F(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|^\alpha} \exp\left(-\|(x,y)\|\right) & \text{voor} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{voor} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

integreerbaar is.

Vraag 2

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een meetbare functie en veronderstel dat $|f(x)| \leq 1 + |x|^{2021}$ voor alle $x \in \mathbb{R}$. Veronderstel dat f in het punt $x = 0$ een linkerlimiet $f(0-)$ en een rechterlimiet $f(0+)$ heeft. Bepaal de limiet

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{n}\right) \exp\left(-|x|\right) dx$$

en bewijs je antwoord nauwkeurig.

Vraag 3

Aan het einde van het bewijs van Propositie 4.17 staat de volgende uitspraak. *Helemaal zoals in het bewijs van de stelling van Fejér volgt er dan dat*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \|f_y - f\|_1 F_n(y) dy \to 0 \quad \textit{wanneer} \quad n \to \infty.$$

Geef voor deze stap een nauwkeurig argument.

Vraag 4

Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ een integreerbare functie met $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0$. Veronderstel ook dat de functie $\mathbb{R} \to \mathbb{C} : x \mapsto xf(x)$ integreerbaar is. Definieer de functie

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$$

(a) Toon aan dat F zowel op $(-\infty, 0]$ als op $[0, +\infty)$ integreerbaar is. Gebruik hiervoor de hint hieronder.

(b) Zij $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Geef een formule voor de Fouriergetransformeerde $\hat{F}(t)$ in termen van de Fouriergetransformeerde $\hat{f}$. Bewijs deze formule nauwkeurig.

Hint: Gebruik de definitie van $F(x)$ alleen voor $x \leq 0$ en herschrijf $F(x) = -\int_{x}^{+\infty} f(y)dy$ voor $x \geq 0$. Laat je in (b) inspireren door oefening 4.62.