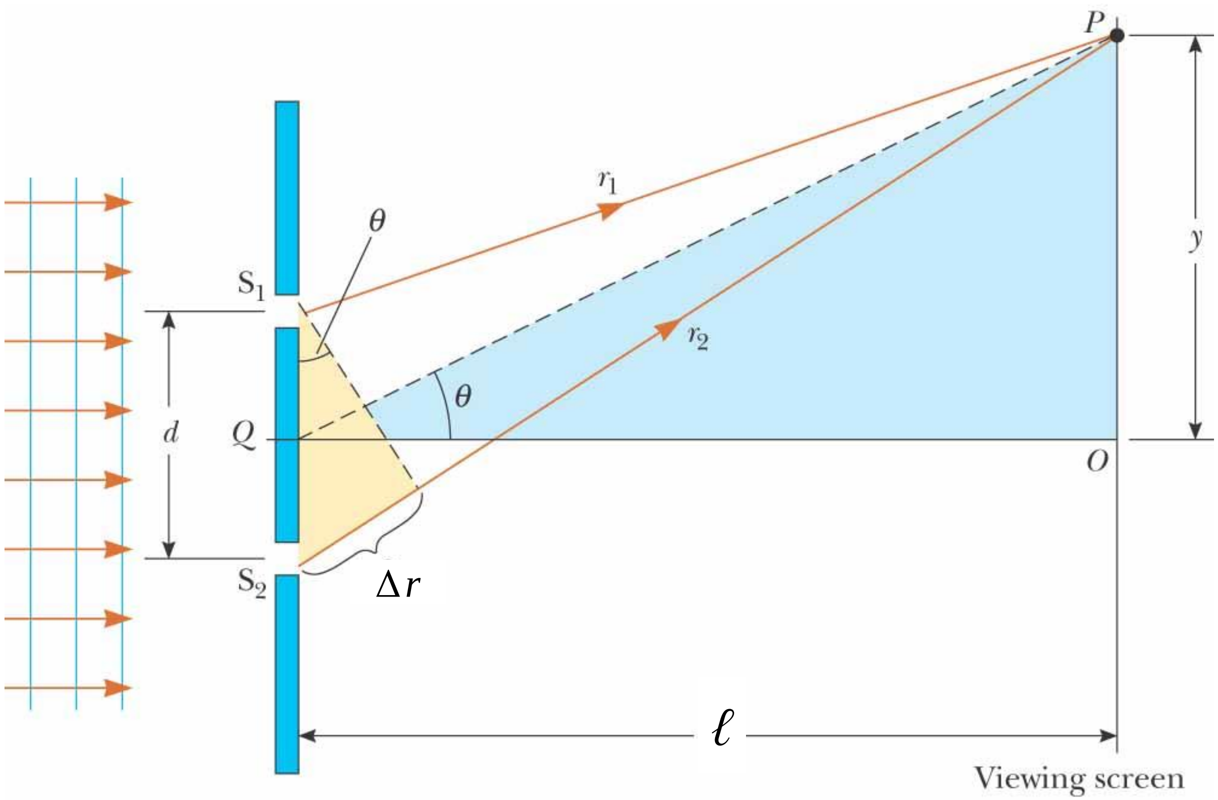
1. Langere vraag over de theorie

a) Leid de voorwaarden af voor constructieve en destructieve interferentie bij het twee-spletenexperiment van Young. Druk deze voorwaarden uit zowel in functie van de hoek θ over de welke de lichtstralen worden afgebogen als in functie van de afstand y tot het centrum van het interferentiepatroon dat gevormd wordt op het scherm dat zich op heel grote afstand ℓ bevindt ten opzichte van de afstand d tussen de twee spleten. Maak bij uw afleiding gebruik van een schets waar de relevante stralen, afstanden en hoeken worden aangegeven.

b) Maak gebruik van de methode van de fasoren om de intensiteitsverdeling te berekenen van het interferentiepatroon dat gevormd wordt op het scherm bij het twee-spletenexperiment van Young. Druk deze intensiteitsverdeling uit zowel in functie van de hoek θ als in functie van de afstand y. Maak ook een tekening van het diagramma met de fasoren met aanduiding van de relevante vectoren en hoeken.

a) Constructieve en destructieve interferentie

- We nemen aan dat het "viewing screen" zich heel ver van de spleten bevindt ($\ell >> d$). Dan zal $\tan\theta \cong \sin\theta \cong \theta$. De twee paden lopen dan in goede benadering evenwijdig aan mekaar.
- Uit de figuur volgt dan dat het verschil in padlengte: $\Delta r = r_2 - r_1 = d \sin\theta$



a) Constructieve en destructieve interferentie, vervolg 1

- Voor de productie van een helder franje bij **constructieve interferentie** moet het verschil in padlengte ofwel nul zijn ofwel een veelvoud van de golflengte:

$$\boxed{\Delta r = d\,\sin\theta_{\text{helder}} = m\lambda \qquad \text{met} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$$

  – *m* wordt de **orde** genoemd. Wanneer *m* = 0, hebben we te maken met het *nulde-orde maximum*. Wanneer *m* = ±1, spreken we over het *eerste-orde maximum*.

- Wanneer **destructieve interferentie** optreedt, wordt een donker franje geobserveerd. In dat geval is er een verschil in padlengte dat een oneven veelvoud is van de halve golflengte:

$$\boxed{\Delta r = d\,\sin\theta_{\text{donker}} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda \qquad \text{met} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$$

a) Constructieve en destructieve interferentie, vervolg 2

- De posities van de franjes kunnen ook in de y-richting gemeten worden vanaf het nulde-orde maximum.
- Zoals hoger aangegeven, nemen we aan dat $\ell >> d$.
- Aangezien θ klein is, kunnen we hier dan de benadering $\tan\theta \approx \sin\theta$ gebruiken en we hebben dat $y = \ell \tan\theta \approx \ell \sin\theta$.

- Voor heldere franjes geldt dat

$$\boxed{y_{\text{helder}} = \frac{\lambda \ell}{d} m \quad \text{met} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$$

- Voor donkere franjes geldt dat

$$\boxed{y_{\text{donker}} = \frac{\lambda \ell}{d} \left(m + \frac{1}{2} \right) \quad \text{met} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$$

b) Intensiteitsverdeling

- De totale grootte van het elektrisch veld wordt in ieder punt gegeven door de superpositie van de twee golven:

$$E_1(t) = E_{10}\sin(\omega t)$$
$$E_2(t) = E_{20}\sin(\omega t + \delta)$$

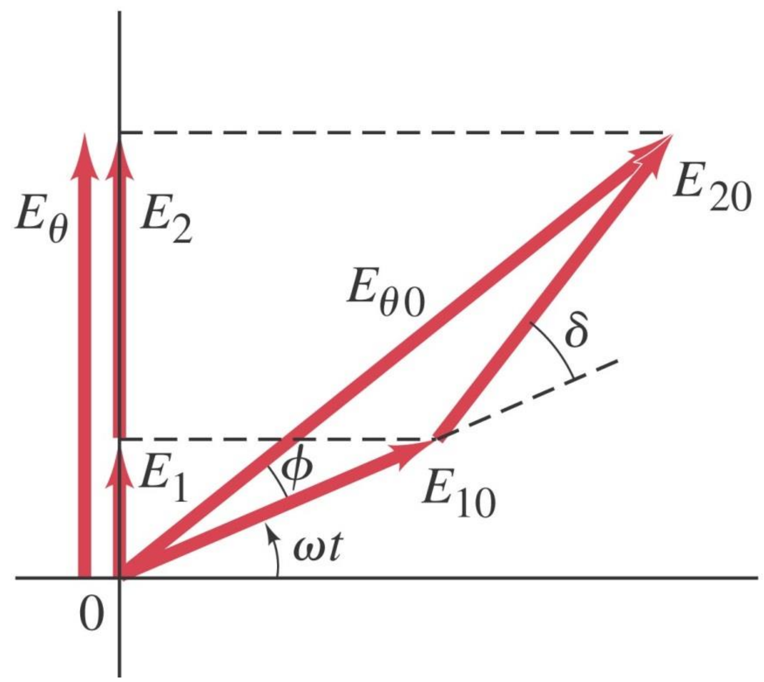
- De grootte van de golf kan in ieder punt *P* op het scherm bepaald worden door de verplaatsingen van de golven op te tellen volgens het superpositiebeginsel.
- Het faseverschil δ tussen de twee golven in punt *P* (zie figuur bij deel a) van de vraag) hangt af van het verschil in padlengte. Dit levert dan

$$\frac{\delta}{2\pi} = \frac{d\sin\theta}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta$$

b) Intensiteitsverdeling, vervolg 1

- Zoals bij wisselstroomketens (zie hoofdstuk 30) kunnen we ook hier gebruik maken van de voorstelling met “fasoren” om de superpositie van de golven te bepalen.
- De vectorsom kunnen we makkelijk bepalen indien de amplitudes gelijk zijn: $E_{10} = E_{20} = E_0$.
- Uit de symmetrie van het vectordiagramma volgt dan dat $\phi = \delta/2$ zodat

$$E_\theta(t) = E_{\theta 0} \sin\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right)$$



b) Intensiteitsverdeling, vervolg 2

- Uit het vectordiagramma volgt ook dat

$$E_{\theta 0} = 2E_0 \cos\phi = 2E_0 \cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

- De vectorsom kunnen we dan herschrijven als

$$E_\theta(t) = 2E_0 \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right)$$

- De heel snelle variaties van het *E*-veld kunnen we niet detecteren. We kunnen wel de variaties in intensiteit opmeten:

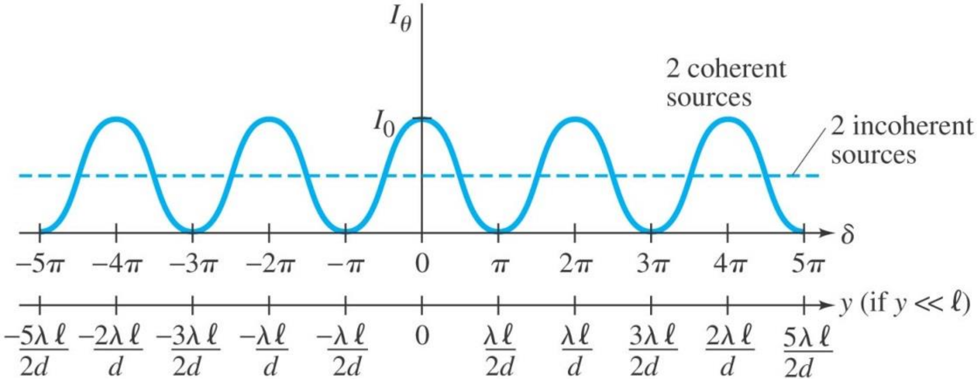
$$\frac{I_\theta}{I_0} = \frac{E_{\theta 0}^2}{(2E_0)^2} = \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right)$$

Intensiteitsverdeling, vervolg 4

- Maxima in de intensiteit treden op wanneer $\cos(\delta/2) = \pm 1$, dit is wanneer aan de voorwaarde voor constructieve interferentie voldaan is. Minima treden op als aan de voorwaarde voor destructieve interferentie voldaan is.
- We kunnen de variaties in intensiteit ook uitdrukken in functie van de positie y op het scherm. Als we zoals hiervoor weer steunen op het feit dat de afstand ℓ tussen de spleten en het scherm veel groter is dan de afstand d tussen de spleten, krijgen we als resultaat:

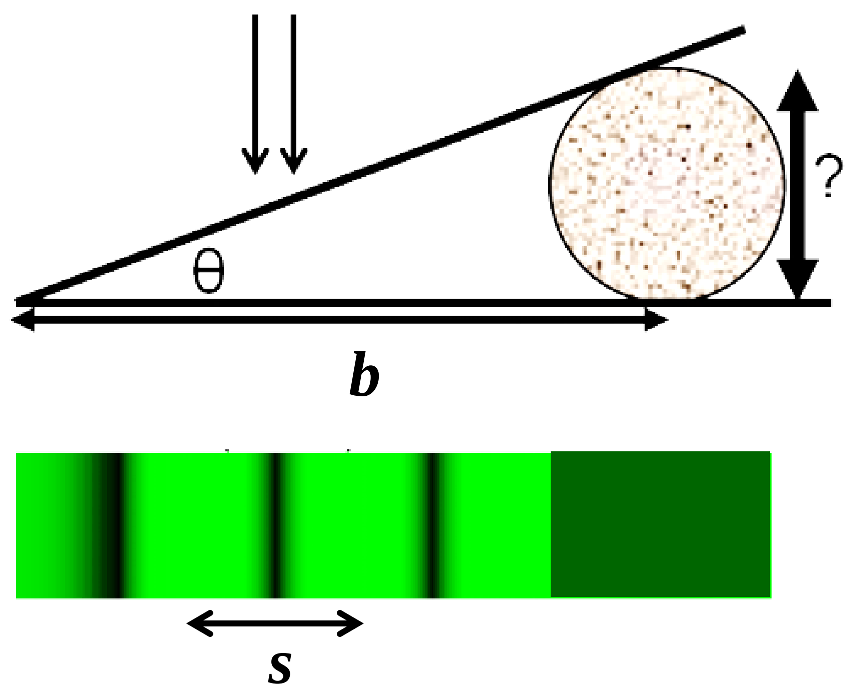
$$\sin\theta = \frac{y}{\ell} \Rightarrow \delta = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{d}{\ell}y$$

$$\Rightarrow I_\theta = I_0\left[\cos\left(\frac{\pi d}{\lambda \ell}y\right)\right]^2$$

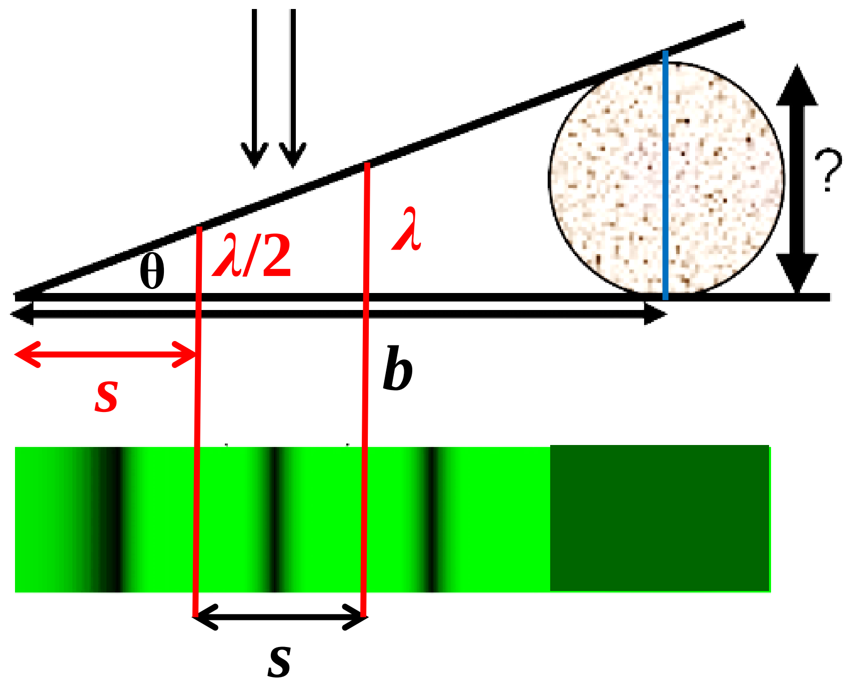


2. Oefening

Je kan de dikte van een haar meten met behulp van een interferometer. Dit wordt voorgesteld op de figuur hieronder. Het haartje wordt tussen twee glasplaatjes geplaatst zodat het ene glasplaatje het andere onder een hoek θ opheft. De glasplaten worden van bovenuit met groen licht met golflengte λ beschenen. Als de opstelling van bovenaan wordt bekeken, dan wordt het getoonde interferentiepatroon waargenomen. De afstand tussen twee opeenvolgende maxima bedraagt s. De afstand tussen het centrum van het haar en het punt waar de twee glasplaatjes samenkomen bedraagt b. Hoe hangt de dikte d van het haar af van b, s en λ (de hoek θ mag dus niet meer voorkomen in het eindresultaat)?



- Het interferentiepatroon is het resultaat van de interferentie tussen de twee lichtgolven die respectievelijk gereflecteerd worden aan het onderste glasplaatje en aan het bovenste glasplaatje. Deze twee golven ondergaan een extra faseverschuiving van 180° bij de reflectie (reflectie aan een optisch dichter medium). We moeten echter geen rekening houden met deze extra faseverschuiving omdat deze extra verschuiving geen invloed heeft op het faseverschil tussen de twee interfererende golven.
- Het maximum in het interferentiepatroon aan de linkerkant waar de twee glasplaatjes samenkomen, komt overeen met een wegverschil tussen de gereflecteerde lichtgolven dat gelijk is aan nul. De twee volgende maxima aan de rechterkant die van mekaar gescheiden zijn door een afstand s (zie zwarte horizontale dubbele pijl op de figuur), komen overeen met een wegverschil van respectievelijk λ en 2λ.
- Teneinde de gevraagde afhankelijkheid voor de dikte van het haar te bekomen, voegen we op de volgende slide enkele aanduidingen toe op de figuur die hoort bij de opgave.



- De twee rode verticale lijnen definiëren twee rechthoekige driehoeken met hoogte respectievelijk gelijk aan $\lambda/2$ en λ en met basis respectievelijk gelijk aan s (zie rode horizontale dubbele pijl) en $2s$. Deze rechthoekige driehoeken leveren het volgende verband:

$$\tan(\theta) = \frac{\lambda}{2s}$$

- De blauwe verticale lijn die door het centrum van het cilindervormige haar gaat, definieert een derde rechthoekige driehoek met hoogte *d* (dikte van het haar) en basis *b*. Deze rechthoekige driehoek leert ons dat

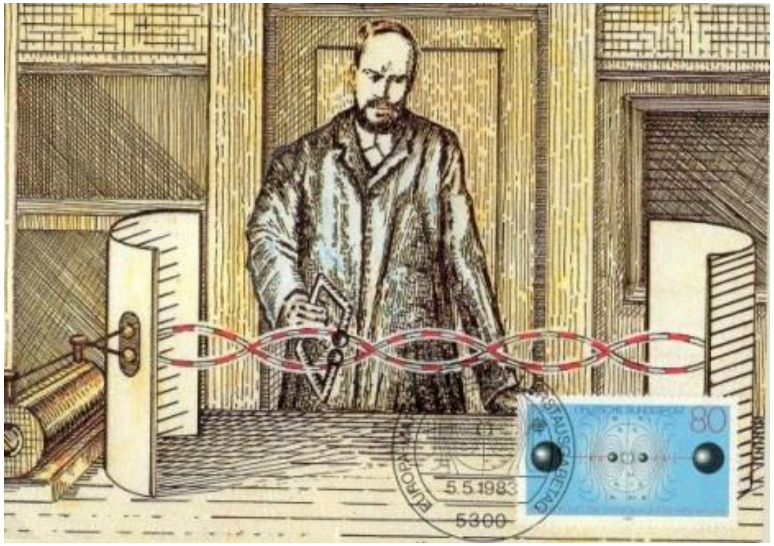
$$\tan(\theta) = \frac{d}{b}$$

- Als we de twee voorgaande vergelijkingen voor $\tan(\theta)$ aan mekaar gelijkstellen, vinden we tenslotte:

$$\frac{d}{b} = \frac{\lambda}{2s} \qquad \Rightarrow \qquad d = \frac{\lambda b}{2s}$$

3. Vier kortere vragen

1. Deze korte vraag handelt over het golfpatroon met 5 buiken dat op de onderstaande figuur wordt opgemeten door Heinrich Hertz. Als de gebruikte frequentie 300 MHz is, wat is dan de afstand tussen de twee gebogen spiegelende oppervlakken waartussen het patroon gevormd wordt?



a. 0.50 m
b. 0.75 m
c. 1.25 m
d. 2.50 m
e. 5.00 m

Mijn antwoord: d = 2.50 m

Mijn verantwoording van het gekozen antwoord:

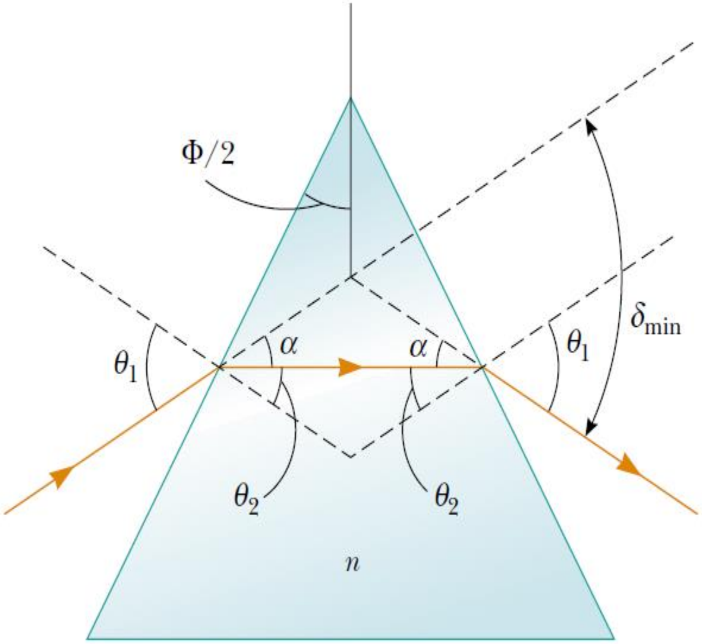
- Voor de gebruikte frequentie f wordt de golflengte λ gegeven door

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3.00\times10^{8}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{300\times10^{6}\,\mathrm{s^{-1}}} = 1.00\,\mathrm{m}$$

- De afstand tussen opeenvolgende buiken, die gelijk is aan de afstand tussen opeenvolgende knopen, bedraagt $\lambda/2$ bij een staande-golfpatroon. Uit de figuur vinden we dan voor de afstand tussen de twee gebogen spiegelende oppervlakken dat

$$s = 5\times\frac{\lambda}{2} = 5\times0.50\,\mathrm{m} = 2.50\,\mathrm{m}$$

2. De kleinst mogelijke hoek δ_{min} voor breking van een monochromatische lichtstraal door een prisma (zie figuur) treedt op wanneer de invalshoek θ_1 zodanig is dat de gebroken straal binnen in het prisma de zelfde hoek θ_2 maakt met de normale op de linkse kant en op de rechtse kant van het prisma. Bereken hoe de brekingsindex n van het prisma dan afhangt van de hoeken δ_{min} en Φ.



Mijn berekening van de brekingsindex n:

Solution Using the geometry shown in the figure, we find that $\theta_2 = \Phi/2$, where Φ is the apex angle and

$$\theta_1 = \theta_2 + \alpha = \frac{\Phi}{2} + \frac{\delta_{\min}}{2} = \frac{\Phi + \delta_{\min}}{2}$$

From Snell's law of refraction, with $n_1 = 1$ because medium 1 is air, we have

$$\sin\theta_1 = n\sin\theta_2$$

$$\sin\left(\frac{\Phi + \delta_{\min}}{2}\right) = n\sin(\Phi/2)$$

$$n = \boxed{\frac{\sin\left(\frac{\Phi + \delta_{\min}}{2}\right)}{\sin(\Phi/2)}}$$

Hence, knowing the apex angle Φ of the prism and measuring $\delta_{\min}$, we can calculate the index of refraction of the prism material. Furthermore, we can use a hollow prism to determine the values of n for various liquids filling the prism.

3. Twee sterren staan heel ver van de aarde op een afstand s. Deze sterren kunnen nog net door een telescoop met een cirkelvormige opening met straal r van mekaar onderscheiden worden. Op welke afstand d bevinden de twee sterren zich van mekaar als de waarneming gebeurt met een golflengte λ? Er mag aangenomen worden dat de afstand d veel kleiner is dan de afstand s.

Mijn berekening van de afstand tussen de twee sterren:

- De angulaire resolutie voor een cirkelvormige opening wordt gegeven door het criterium van Rayleigh (zie formularium):

$$\theta_{\min} = 1.22\,\frac{\lambda}{D}$$

- D is de diameter van de cirkelvormige opening en is dus gelijk aan 2 keer de straal r van de opening. Rekening houdend met de visuele voorstelling van het criterium in figuur 35-14 in het handboek, waarbij de afstand s van de opening tot de 2 sterren O en O' veel groter is dan hun onderlinge afstand d, wordt de afstand d dan

$$d = s \times \theta_{\min} = 1.22\,\frac{s\lambda}{2r}$$

4. Een vleermuis die met een snelheid v naar een muur toe vliegt (volgens een richting loodrecht op de muur), zendt een geluidsgolf uit met een frequentie f. Indien deze golf gereflecteerd wordt door de muur, wat is dan de frequentie van de echo die de vleermuis opvangt?

Mijn berekening van de frequentie van de opgevangen echo:

- De waargenomen frequentie berekenen we met behulp van de uitdrukking voor het Doppler-effect die in het formularium kan teruggevonden worden. Bij de berekening moeten we er rekening mee houden dat er twee keer een verschuiving, en meer bepaald een verhoging, van de frequentie optreedt:

  (i) De vleermuis die naar de muur toe beweegt en een geluidsgolf uitzendt die op de muur terecht komt, correspondeert met een situatie waarbij de bron (de vleermuis) naar de waarnemer (de muur) toe beweegt.

  (ii) De muur reflecteert de door de vleermuis uitgezonden geluidsgolf en de muur fungeert dan als stilstaande bron en de vleermuis als bewegende waarnemer.

Mijn berekening van de frequentie van de opgevangen echo, vervolg:

- De combinatie van de twee Doppler-verschuivingen vinden we dan door in de uitdrukking die beschikbaar is in het formularium, de gepaste snelheden in te vullen:

$$f' = \left[\frac{v_{\text{snd}} + v_{\text{obs}}}{v_{\text{snd}} - v_{\text{source}}}\right] f \qquad \Rightarrow \qquad f_{\text{echo}} = \left[\frac{340\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} + v}{340\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} - v}\right] f$$