1. Langere vraag over de theorie

a) Beschrijf in detail het opladingsproces voor een condensator die in serie wordt geschakeld met een gelijkspanningsbron en met een weerstand (de inwendige weerstand van de gelijkspanningsbron mag verwaarloosd worden). Wat is de tijdsconstante van het opladings-proces voor deze RC-keten? Toon aan dat er behoud van energie is bij het opladingsproces.

b) Beschrijf in detail het ontladingsproces voor een condensator die in serie wordt geschakeld met een weerstand Wat is de tijdsconstante van het ontladingsproces voor deze RC-keten? Toon aan dat er ook bij het ontladingsprces behoud van energie is.

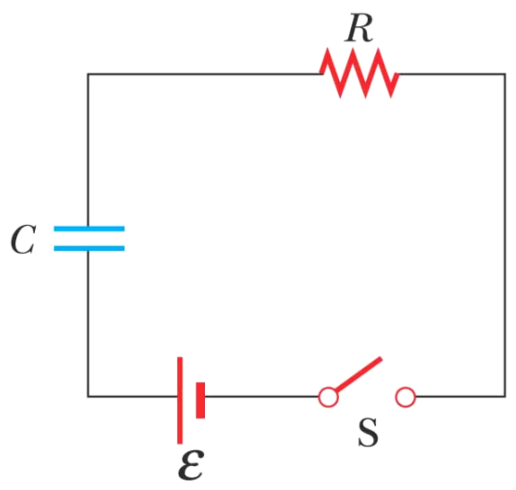
Deze eerste vraag peilt naar het "kennen" van de leerstof. Het antwoord is dan ook direct terug te vinden in de be-treffende PowerPoint presentatie.

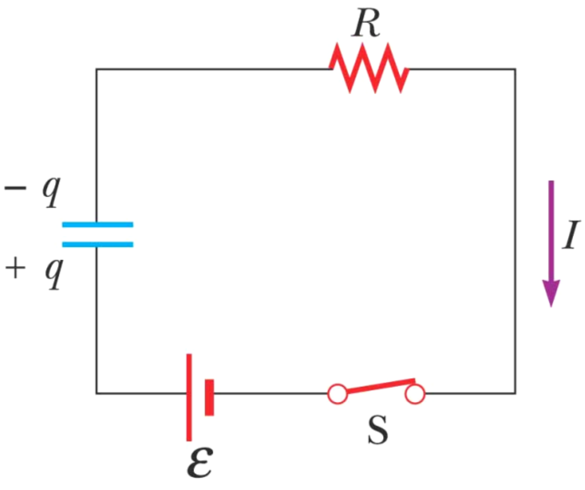
Oplading van een RC-keten

- In een gelijkstroomketen met een weerstand en een condensator in serie, zal de stroom variëren in functie van de tijd.
- Wanneer de keten wordt gesloten met de schakelaar S op tijd $t = 0$, begint de condensator op te laden.
- De condensator blijft opladen totdat hij zijn maximale lading Q bereikt:

$$Q = C\,\mathcal{E}$$

- Wanneer de condensator volledig is opgeladen, valt de stroom in de keten opnieuw naar nul.





Oplading van een RC-keten, vervolg 1

- Op het moment dat de schakelaar gesloten wordt, is de lading op de condensator gelijk aan nul.
- Naarmate de platen van de condensator worden opgeladen, zal het potentiaalverschil over de condensator toenemen.
- Eens de maximale lading bereikt, zal de stroom in de keten terug gelijk aan nul worden.

  → Het potentiaalverschil over de condensator is dan in grootte gelijk aan het potentiaalverschil over de polen van de batterij ("open kring").
- Tweede regel van Kirchhoff toepassen voor de gesloten lus levert:

$$\mathcal{E} - \frac{q(t)}{C} - I(t)\,R = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E} - \frac{q(t)}{C} - R\,\frac{dq(t)}{dt} = 0$$

→ Dit is een differentiaalvergelijking voor $q(t)$.

Oplading van een RC-keten, vervolg 2

- We kunnen deze differentiaalvergelijking oplossen door “scheiding van de veranderlijken”:

$$\frac{C\mathcal{E}}{RC} - \frac{q(t)}{RC} - \frac{dq(t)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dq(t)}{C\mathcal{E} - q(t)} = \frac{dt}{RC}$$

- Vervolgens integreren we beide leden van deze vergelijking tussen $t = 0$ en de tijd t waarop de lading op de condensator de waarde q heeft bereikt:

$$\int_0^q \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right) = -\frac{t}{RC}$$

- Om $q(t)$ te vinden nemen we dan de e-macht van beide leden en kijken ook nog na of de oplossing voldoet aan het feit dat voor heel grote tijden de lading op de condensator gelijk wordt aan $Q = C\mathcal{E}$.

Oplading van een RC-keten, vervolg 3

- De tijdsafhankelijkheid van de lading op de condensator wordt dan uiteindelijk:

$$\boxed{q(t) = C\mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = Q\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}$$

- Afleiden naar de tijd levert de tijdsafhankelijkheid van de stroom tijdens het opladen:

$$\boxed{I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}} = I(t=0)\, e^{-\frac{t}{RC}}}$$

- We definiëren dan de **tijdsconstante** τ voor de RC-keten als

$$\boxed{\tau = RC}$$

Oplading van een RC-keten, vervolg 4

- De tijdsconstante $\tau = RC$ komt overeen met de tijd die nodig is om de lading te verhogen van nul tot 63.2% van de maximale lading, dit is tot $Q = C\mathcal{E}\left(1-1/e\right)$. Gedurende diezelfde tijd is de stroom gereduceerd met een factor $1/e$, dit is tot 36.8% van zijn initiële waarde (zie ook voorbeeld 26-11).
- We kunnen ook berekenen hoeveel energie de emk-bron heeft geleverd tijdens het opladen:

$$U_{\mathrm{emk}} = \int_0^{U_{\mathrm{emk}}} dU = \int_0^{Q} \mathcal{E}\,dq = \mathcal{E}\int_0^{Q} dq = Q\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2$$

- Uit hoofdstuk 24 weten we wat de energie is die opgeslagen zit in de condensator:

$$U_{\mathrm{C}} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}$$

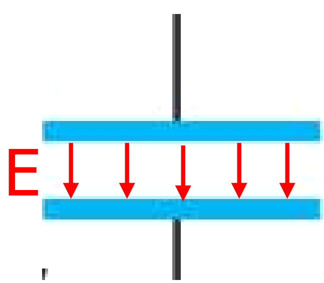
Oplading van een RC-keten, vervolg 5

- Er werd ook energie gedissipeerd in de weerstand:

$$\int_0^{U_R} dU = \int_0^{\infty} P\,dt = \int_0^{\infty} I^2 R\,dt = \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^2}{R^2} R\, e^{-\frac{2t}{RC}} dt$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{R}\int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = \frac{\varepsilon^2}{R}\,\frac{RC}{2}\left(-\,e^{-\frac{2t}{RC}}\Big|_0^{\infty}\right) \Rightarrow U_R = \frac{C\varepsilon^2}{2}$$

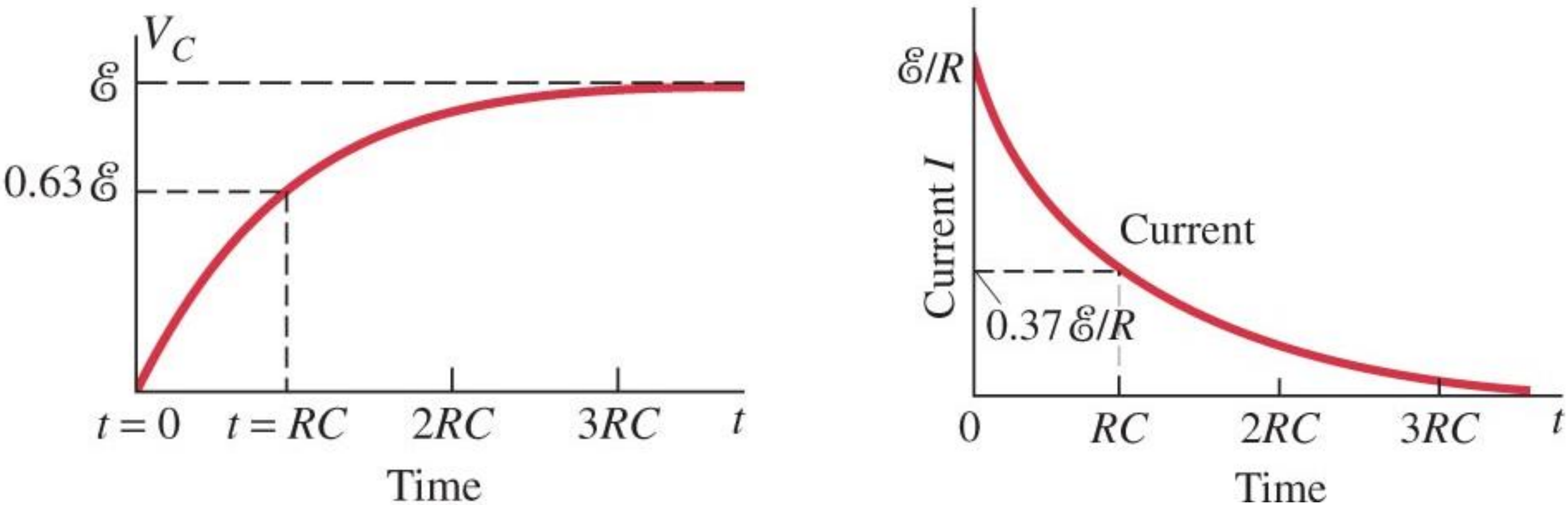
- De energie geleverd door de emk werd netjes verdeeld over de weerstand en de condensator!



$$\boxed{U_{emk} = U_C + U_R}$$

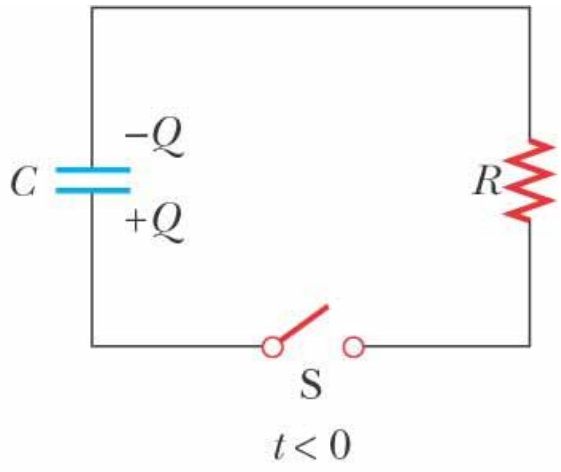
Oplading van een RC-keten, vervolg 6

- We bekijken ook nog de grafische voorstelling van de tijdsafhankelijkheid van het potentiaalverschil over de condensator en de stroom in de keten:



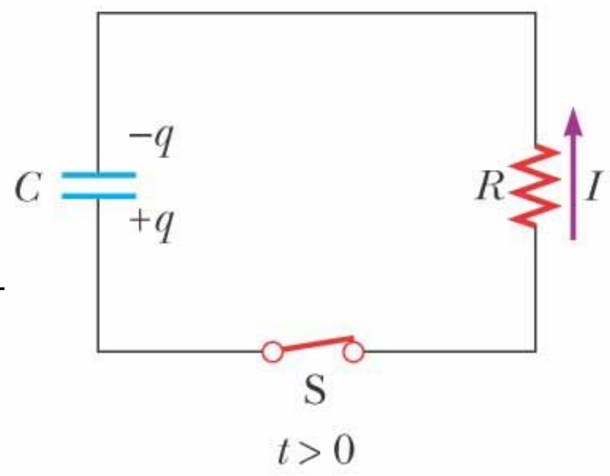
Ontladen van een RC-keten

- Een opgeladen condensator met initiële lading Q kan opnieuw worden ontladen.
- We tonen hierna aan dat het ontladen gebeurt met dezelfde tijdsconstante $\tau = RC$ als het opladen.
- Ook hier passen we de tweede regel van Kirchhoff toe voor de gesloten lus:



$$I(t)\,R + \frac{q(t)}{C} = 0 \quad \text{met} \quad I(t) = -\frac{dq(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad -R\,\frac{dq(t)}{dt} = \frac{q(t)}{C} \quad \Rightarrow \quad -\frac{dq(t)}{q(t)} = \frac{dt}{RC}$$



Ontladen van een RC-keten, vervolg 1

- We integreren tussen tijd nul en tijd t. In dit tijdsinterval vermindert de lading van Q tot $q(t)$:

$$\int_{Q}^{q(t)} \frac{dq}{q} = -\int_{0}^{t} \frac{dt}{RC} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{q}{Q}\right) = -\frac{t}{RC}$$

- Voor de tijdsafhankelijkheid van de lading krijgen we dat

$$\boxed{q(t) = Q\, e^{-\frac{t}{RC}}}$$

- Dit levert dan voor de tijdsafhankelijkheid van de stroom dat

$$\boxed{I(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = \frac{Q}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}} = I(t=0)\, e^{-\frac{t}{RC}}}$$

Ontladen van een RC-keten, vervolg 2

- Bij $t = \tau = RC$ is de lading gereduceerd tot 0.368 Q_{max}. Met andere woorden, de condensator heeft dan 63.2% van zijn initiële lading verloren.
- De energiebalans van de RC-keten geeft dan dat

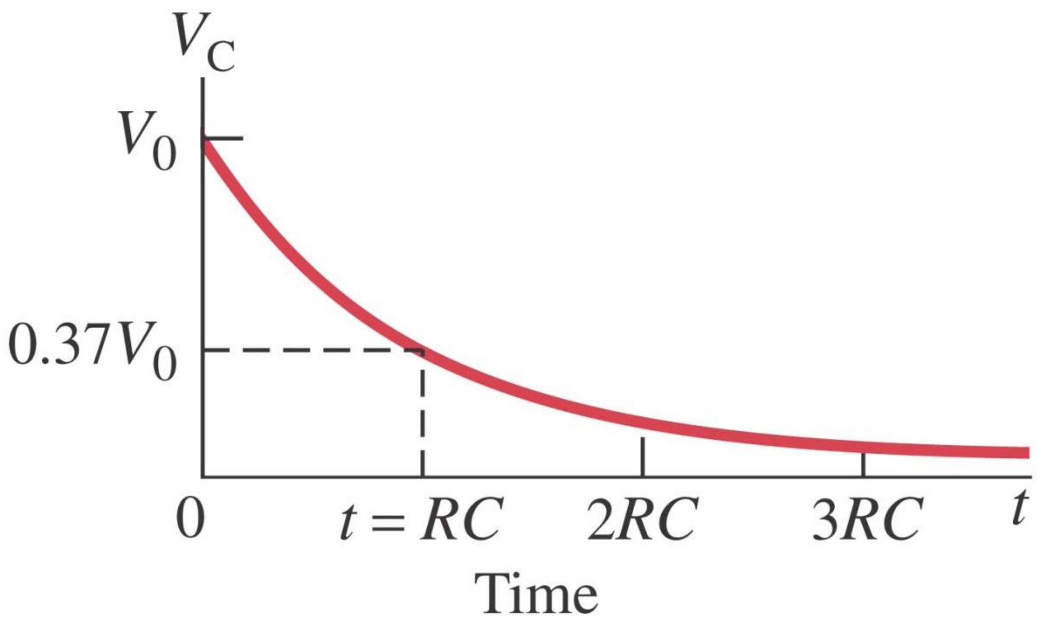
$$\int_0^{U_{\mathrm{R}}} dU = \int_0^{\infty} P\,dt = \int_0^{\infty} I^2 R\,dt = \frac{Q^2 R}{R^2 C^2} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{2t}{RC}}\,dt = \frac{Q^2}{2C}$$

$$\Rightarrow \qquad U_R = \frac{Q^2}{2C}$$

- De energie die oorspronkelijk opgeslagen was in de condensator, wordt bij het ontladen door de weerstand omgezet in warmte.

Ontladen van een RC-keten, vervolg 3

- We bekijken ook nog de grafische voorstelling van de tijdsafhankelijkheid van het potentiaalverschil V_C over de condensator die ontlaadt [$V(t = 0) = V_0$].



2. Oefening

In een vacuümdiode worden elektronen van een hete, met de aarde verbonden kathode "afgekookt" en versneld richting de anode, die op een positieve potentiaal V_0 wordt gehouden. De wolk van bewegende elektronen in de ruimte tussen de kathode en anode wordt gestaag aangedikt waardoor het elektrisch veld aan het oppervlak van de kathode naar nul gaat. Vanaf dit moment loopt er een vaste stroom I tussen de twee platen.

Je mag ervan uitgaan dat de platen groot zijn ten opzichte van de onderlinge afstand (dit wil zeggen dat $A \gg d^2$ in de figuur), zodat randeffecten verwaarloosd kunnen worden. In dit geval zijn V, ρ en v (de snelheid van de elektronen) enkel functies van x.

(a) Toon aan dat

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \ .$$

(b) Veronderstel dat de elektronen vanuit rust vertrekken aan de kathode. Wat is dan hun snelheid op een afstand x, wanneer de potentiaal gegeven wordt door $V(x)$?

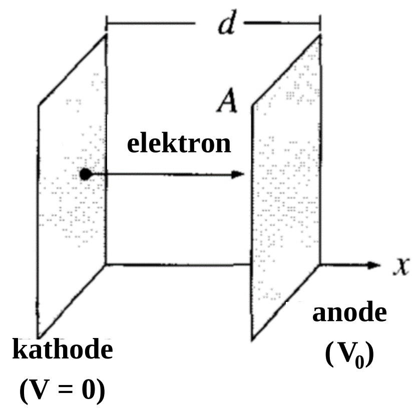
(c) In de uiteindelijke situatie is I onafhankelijk van x. Wat is dan de relatie tussen ρ en v?

(d) Gebruik voorgaande resultaten om een differentiaalvergelijking voor V te verkrijgen.

(e) Toon aan dat

$$V(x) = \left(\frac{81\, I^2 m}{32\, \epsilon_0^2 A^2 q}\right)^{1/3} x^{4/3} = V_0 \left(\frac{x}{d}\right)^{4/3}$$

een oplossing is van de differentiaalvergelijking en vind de relaties voor ρ en v in functie van x.



a) Zoals bij de standaard situatie voor de condensator met vlakke platen zal het elektrisch veld loodrecht staan op de platen, maar het veld zal nu niet constant zijn en variëren met de positie x tussen de platen. We kunnen gebruik maken van de wet van Gauss waarbij we als Gaussisch oppervlak een cilinder nemen die een van de platen doorboort. Er is dan enkel een bijdrage aan de elektrische flux van het cirkelvormig deel van de cilinder met oppervlakte S dat ligt tussen de platen en loodrecht staat op de as van de cilinder:

$$\Phi_E = \oiint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q_{ing}}{\varepsilon_0} = ES = \frac{Q_{ing}}{\varepsilon_0} = \iiint \frac{\rho(x)\, dV}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad ES = \int \frac{\rho(x)\, S\, dx}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \int \frac{\rho(x)\, dx}{\varepsilon_0}$$

We maken dan gebruik van het verband tussen E en V en vinden dat

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{dE}{dx} = -\frac{d}{dx}\int \frac{\rho(x)\, dx}{\varepsilon_0} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

b) Om de snelheid $v(x)$ te bepalen voor een lading q als de variatie $V(x)$ gekend is, maken we gebruik van het behoud van energie:

$$qV = \frac{mv^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

c) Om de relatie tussen ρ en v te vinden bij constante stroom I, maken we gebruik van het gekende verband tussen de lading Q, het volume V en de ladingsdichtheid ρ:

$$Q = \rho V \quad \Rightarrow \quad dq = \rho\, dx\, A \quad \Rightarrow \quad \frac{dq}{dt} = \rho A \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad I = \rho A v = neAv$$

d) De hiervoor gevonden resultaten kunnen we dan gebruiken om een differentiaalvergelijking voor $V(x)$ te bekomen en dit voor het algemeen geval dat we te maken hebben met een bewegende lading q:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -\frac{I}{Av\varepsilon_0} = -\frac{I}{A\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2qV}}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{I}{A\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2q}}\,V^{-1/2}$$

e) Eerst berekenen we de tweede afgeleide van de opgegeven gedetailleerde vorm van de oplossing voor $V(x)$:

$$V = \left(\frac{81\,I^2 m}{32\,\varepsilon_0^2 A^2 q}\right)^{1/3} x^{4/3} \Rightarrow \frac{dV}{dx} = \left(\frac{81\,I^2 m}{32\,\varepsilon_0^2 A^2 q}\right)^{1/3} \frac{4}{3}\,x^{1/3}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2V}{dx^2} = \left(\frac{81\,I^2 m}{32\,\varepsilon_0^2 A^2 q}\right)^{1/3} \frac{4}{9}\,x^{-2/3}$$

De opgegeven oplossing en de berekende twee afgeleide vullen we dan in in de differentiaalvergelijking die we hiervoor vonden (zie d)):

$$\left(\frac{81\,I^2 m}{32\,\varepsilon_0^2 A^2 q}\right)^{1/3} \frac{4}{9}\, x^{-2/3} \;=\; -\frac{I}{A\varepsilon_0}\,\sqrt{\frac{m}{2q}}\left(\frac{81\,I^2 m}{32\,\varepsilon_0^2 A^2 q}\right)^{-1/6} x^{-2/3}$$

$$\Rightarrow\;\left(\frac{81\,I^2 m}{32\,\varepsilon_0^2 A^2 q}\right)^{1/2} \frac{4}{9} \;=\; -\frac{I}{A\varepsilon_0}\,\sqrt{\frac{m}{2q}}$$

We kunnen makkelijk narekenen dat altijd voldaan is deze laatste vergelijking. We bekomen vervolgens het gevraagde verloop van ρ tussen de platen van de condensator door de opgegeven verkorte vorm van de oplossing voor $V(x)$ in te vullen in het bekomen resultaat voor deel a) van de oefening:

$$\rho(x) \;=\; -\varepsilon_0 \frac{d^2V}{dx^2} \;=\; -\frac{4\,\varepsilon_0 V_0}{9\,d^{4/3}}\, x^{-2/3}$$

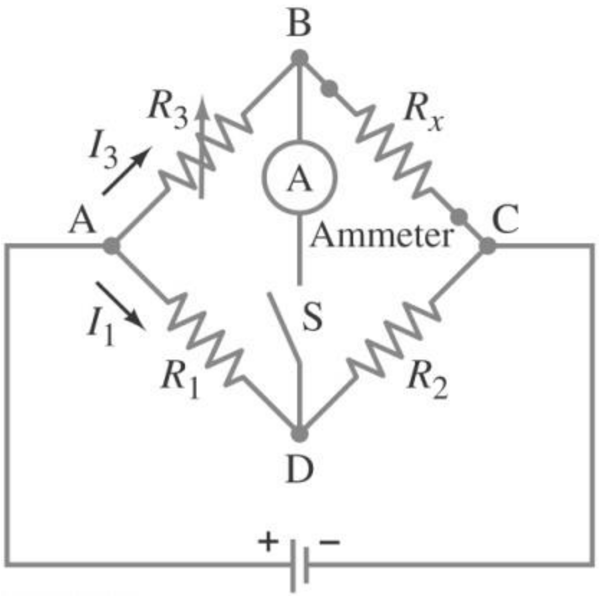
Tenslotte bekomen we het gevraagde verloop van v tussen de platen van de condensator door de opgegeven verkorte vorm van de oplossing voor $V(x)$ in te vullen in het bekomen resultaat voor deel b) van de oefening:

$$v(x) = \sqrt{\frac{2q\,V(x)}{m}} = \sqrt{\frac{2q}{m}}\,\left[V(x)\right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2qV_0}{m}\left(\frac{x}{d}\right)^{2/3}}$$

Nog wat extra toelichting bij het bekomen resultaat voor $V(x)$ (zie deel e) van de oefening): het elektrisch veld $E(x)$ varieert evenredig met dV/dx en we vinden dan dat $E(x)$ evenredig met $x^{1/3}$ varieert. Dit bevestigt dat bij het vloeien van de stroom I het veld ter hoogte van de linkse plaat van de condensator inderdaad naar nul valt!

3. Vier kortere vragen

1. Onderstaande figuur toont de zogenaamde brug van Wheatstone die toelaat om een onbekende weerstand te bepalen met behulp van drie gekende weerstanden R_1, R_2 en R_3 waarbij R_3 regelbaar is. Als de brug in evenwicht is, dit is als de stroommeter geen stroom detecteert bij het sluiten van de schakelaar S, dan wordt de onbekende weerstand R_x gegeven door het verband $R_x = (R_2\, R_3)/R_1$. Maak gebruik van de regels van Kirchhoff om aan te tonen dat dit inderdaad het geval is.



- Als de brug in evenwicht is loopt er geen stroom tussen de punten B en D zodat $V_B = V_D$. Hieruit volgt dan dat het potentiaalverschil $V_B - V_A$ gelijk is aan het potentiaalverschil $V_D - V_A$. We hebben daarnaast ook dat het potentiaalverschil $V_C - V_B$ gelijk is aan het potentiaalverschil $V_C - V_D$.
- Door toepassing van de wet van Ohm krijgen we dan volgende vergelijkingen:

$$R_1 I_1 = R_3 I_3 \quad \text{en} \quad R_2 I_1 = R_x I_3$$

- Hierbij hebben we gebruik gemaakt van het feit dat dezelfde stroom I_1 loopt door de weerstanden R_1 en R_2 en dat dezelfde stroom I_3 loopt door de weerstanden R_3 en R_x. Uit de twee bovenstaande vergelijkingen leiden we het gezochte resultaat af:

$$I_1 = \frac{R_3 I_3}{R_1} \quad \Rightarrow \quad R_2 \frac{R_3 I_3}{R_1} = R_x I_3 \quad \Rightarrow \quad R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

2. Een deeltje met een lading gelijk aan 100 μC beweegt in rechte lijn naar een ander deeltje met een lading die eveneens gelijk is aan 100 μC en dat op een vaste positie wordt gehouden. Op het moment dat de afstand tussen de twee deeltjes 1.0 m bedraagt, is de kinetische energie van het bewegende deeltje gelijk aan 10 J. Wat is de afstand tussen de twee deeltjes op het moment dat de snelheid van het bewegende deeltje minimaal is?

a. 1.8 m
b. 0.45 m
c. 0.9 m
d. oneindig groot
e. 0 m

Mijn antwoord: c = 0.9 m

Mijn verantwoording van het gekozen antwoord:

- We maken gebruik van het behoud van energie (= kinetische energie + potentiële energie) en vergelijken de situatie in het begin (afstand tussen de deeltjes bedraagt 1m) met de situatie als het bewegende deeltje tot stilstand is gekomen, dit is vlak voor het moment dat het van het stilstaande deeltje begint weg te bewegen (dan bereikt de afstand tevens zijn minimale waarde):

$$\text{totale energie} = \frac{m v_0^2}{2} + \frac{k_e\, q^2}{r_0} = 0 + \frac{k_e\, q^2}{r_{\min}}$$

- Zowel de kinetische energie $mv_0^2/2 = 10\,\mathrm{J}$ als de afstand $r_0 = 1\,\mathrm{m}$ en de lading $q = 10^{-4}\mathrm{C}$ zijn gegeven. Uit bovenstaande vergelijking vinden we dan dat de totale energie 100J bedraagt. Hieruit kunnen we de minimale afstand $r_{\min}$ berekenen en we vinden hiervoor dan oplossing c.

3. Het “punteffect” kunnen we begrijpen door te berekenen hoe het elektrisch veld afhangt van de straal voor twee geladen metalen sferen met respectievelijke stralen r_1 en r_2 die door een metalen draad met mekaar zijn verbonden. Bereken de verhouding tussen de elektrische velden aan het oppervlak van beide sferen.

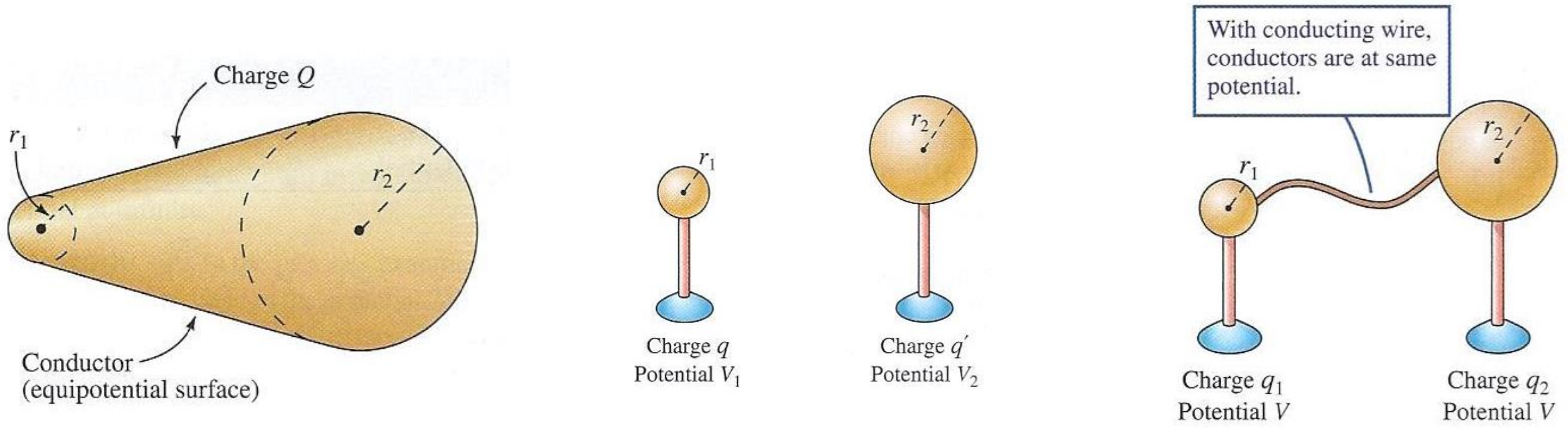
- Het “punteffect” komt er op neer dat voor het oppervlak van een metaal het elektrisch veld het grootst wordt waar de kromtestraal lokaal het kleinst is (aan scherpe punten).
- Voor een metalen sfeer met straal r en lading Q wordt de potentiaal van het oppervlak gegeven door

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- De twee elektrisch verbonden sferen met verschillende straal r_1 en r_2 (zie figuur) bevinden zich op dezelfde potentiaal zodat voor de ladingsdichtheden σ en voor de elektrische velden E geldt dat:

$$\sigma_1 r_1 = \sigma_2 r_2 \qquad \text{en} \qquad \frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Hierbij hebben we gesteund op het feit dat het elektrisch veld van een sfeer met ladingsdichtheid σ gegeven wordt door $E = \sigma/\varepsilon_0$.



4. Het elektrisch veld in het getoonde gebied wordt gegeven door $\mathbf{E} = (8\mathbf{i} + 2y\mathbf{j})$ N/C waarbij y in meter is. Wat is de grootte van de elektrische flux door het bovenvlak van de kubus in de figuur?

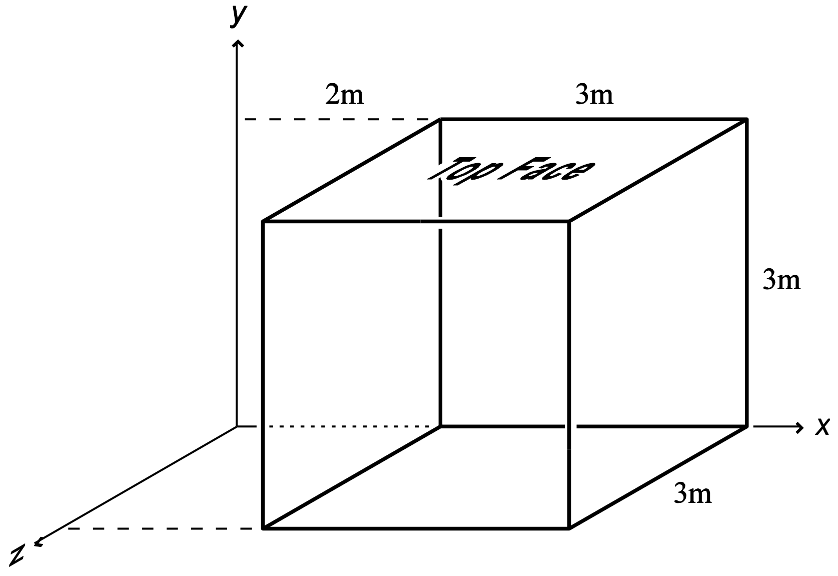
a. $90\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$

b. $6\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$

c. $54\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$

d. $12\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$

e. $126\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$



Mijn antwoord: c = $54\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}$

Mijn verantwoording van het gekozen antwoord:

We gebruiken de definitie van de flux van het elektrisch veld:

$$\Phi_E = \iint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \iint \left(8\vec{\mathbf{i}} + 2y\vec{\mathbf{j}}\right) \cdot dx\,dz\,\vec{\mathbf{j}}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi_E = \iint 2y\;dx\,dz = 2y \iint dx\,dz = 6\,\mathrm{N/C} \times 9\,\mathrm{m}^2 = 54\,\mathrm{Nm}^2/\mathrm{C}$$