1. Langere vraag over de theorie

a) Bereken, vertrekkend van de definitie van capaciteit, de capaciteit van een condensator die bestaat uit twee evenwijdige vlakke platen waarbij de afstand tussen de platen veel kleiner is dan de laterale afmeting van de platen.

b) Bereken, vertrekkend van de definitie van capaciteit, de capaciteit van een cilindervormige condensator die bestaat uit een binnenste cilinder en een coaxiale buitenste cilinder waarbij de stralen van de cilinders veel kleiner zijn dan hun lengte.

Deze eerste vraag peilt naar het “kennen” van de leerstof. Het antwoord is dan ook direct terug te vinden in de betreffende PowerPoint presentaties.

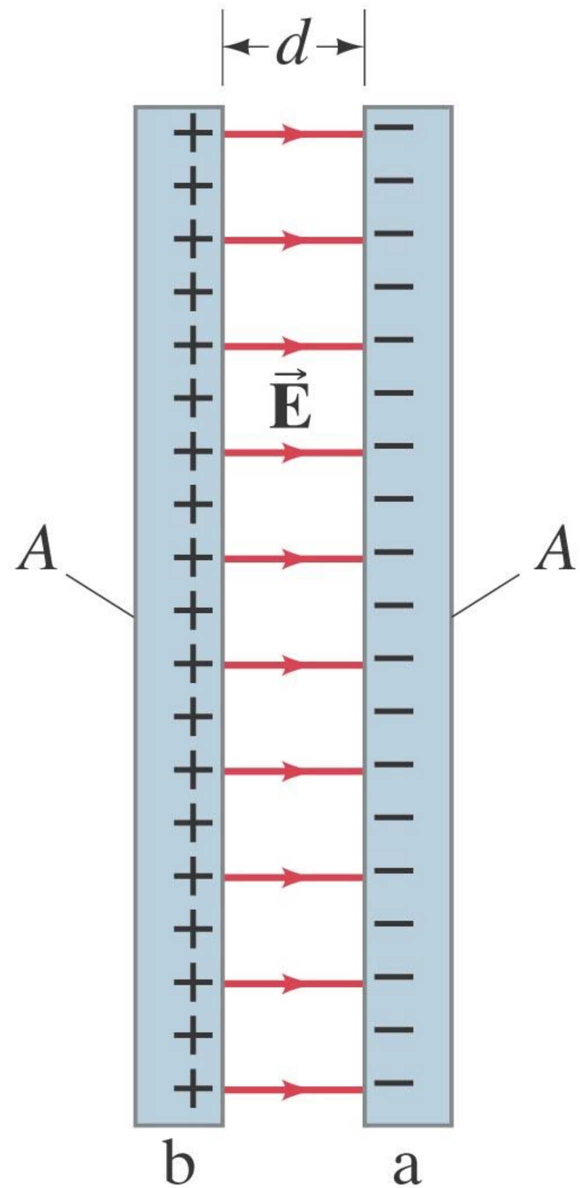
a) Capaciteit van een vlakke condensator

- We bekijken eerst een condensator met twee evenwijdige platen met ladingen $+Q$ en $-Q$. De platen hebben een oppervlakte A en zitten op een afstand d van mekaar.
- We mogen aannemen dat de afstand tussen de platen veel kleiner is dan de laterale afmetingen van de platen, zodat we een homogeen veld hebben (geen randeffecten):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A\,\varepsilon_0}$$

- Het potentiaalverschil van a naar b wordt gegeven door (zie formularium)

$$V = V_{ba} = V_{\mathrm{b}} - V_{\mathrm{a}} = -\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\ell}$$



a) Capaciteit van een vlakke condensator, vervolg

- We bepalen dan de lijnintegraal voor het pad waarbij veld en verplaatsing anti-parallel lopen:

$$V = V_b - V_a = -\int_a^b E\,d\ell \cos 180^\circ = +\int_a^b E\,d\ell$$

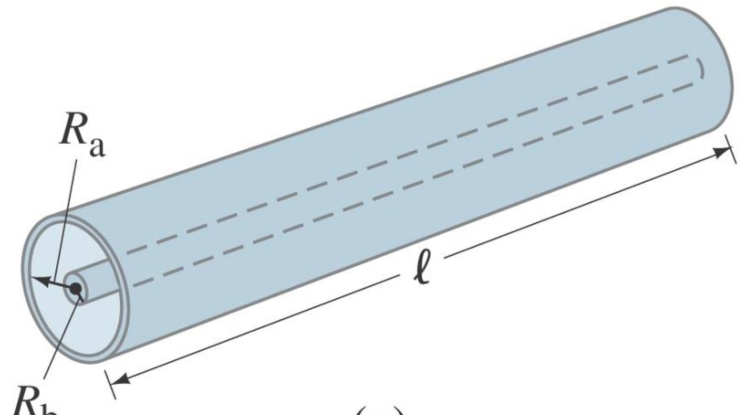
$$= \frac{Q}{\varepsilon_0 A}\int_a^b d\ell = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}$$

- De capaciteit is per definitie de verhouding tussen Q en V en we vinden dan voor de capaciteit van de vlakke condensator dat

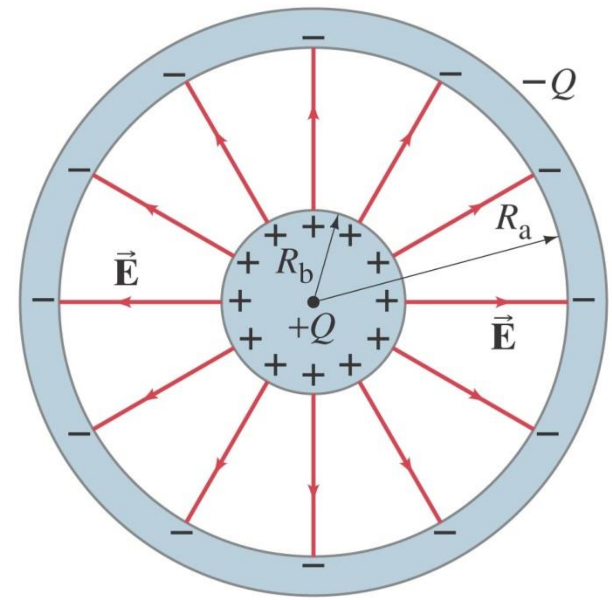
$$\boxed{C = \frac{Q}{V} = \varepsilon_0 \frac{A}{d}}$$

b) Capaciteit van een cilindrische condensator

- We beschouwen een condensator met een cilindervormige buis met straal R_b die omgeven wordt door een coaxiale holle cilinder met straal R_a. De buizen dragen ladingen $+Q$ en $-Q$. We moeten nu het potentiaalverschil V berekenen tussen beide cilinders. Daarvoor hebben we het elektrisch veld nodig rond een homogeen geladen lange staaf (zie hoofdstuk 21).
- Bij de staaf is de lading $+Q$ uniform verdeeld over de staaf en we mogen aannemen dat de lengte ℓ van de staaf veel groter is dan de doormeter van de staaf.

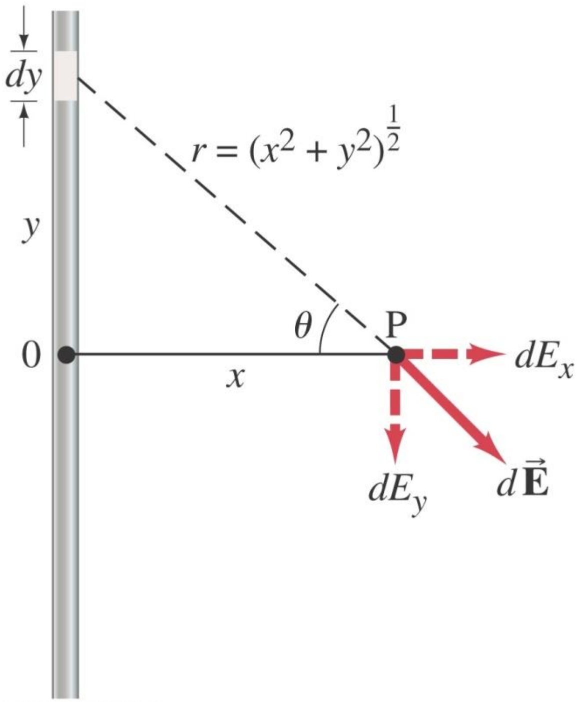


(a)



(b)

b) Capaciteit van een cilindrische condensator – vervolg 1



- $\rightarrow$ Lineaire ladingsverdeling:

$$\lambda = Q/\ell$$

- We berekenen dan de bijdrage dE van de lading dQ op het stukje dy van de staaf tot de grootte van het totaal elektrisch veld voor een punt op de x-as loodrecht op het midden van de staaf:

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda\, dy}{4\pi\varepsilon_0 \left(x^2 + y^2\right)}$$

- Omwille van de symmetrie zullen de y-componenten van de velden veroorzaakt door de stukjes boven en onder 0 mekaar opheffen! Enkel de x-componenten van het veld overleven de integratie:

b) Capaciteit van een cilindrische condensator – vervolg 2

$$E = E_x = \int dE_x = \int dE \cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dy}{x^2 + y^2} \cos\theta$$

- De integratie loopt enkel over y (x wordt constant gehouden). We maken dan verder gebruik van het feit dat $y = x \tan\theta$ en dat aldus $dy = x\, d\theta/\cos^2\theta$. Vermits $\cos\theta = x/(x^2+y^2)^{1/2}$ is $1/(x^2+y^2) = \cos^2\theta/x^2$:

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{x} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos\theta \, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 x} \sin\theta \Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda}{x}$$

- Bij de integratie hebben we de draad als oneindig lang beschouwd ten opzichte van de afstand x (= punt P dicht genoeg bij de draad)! In de berekening hierna stellen we $x = R$.

b) Capaciteit van een cilindrische condensator – vervolg 3

- Het potentiaalverschil tussen de buitenste en binnenste cilinder is dan

$$V = V_{\mathrm{b}} - V_{\mathrm{a}} = -\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \int_{R_a}^{R_b} \frac{dR}{R}$$

$$= -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \ln\left(\frac{R_{\mathrm{b}}}{R_{\mathrm{a}}}\right) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \ln\left(\frac{R_{\mathrm{a}}}{R_{\mathrm{b}}}\right)$$

- De capaciteit wordt tenslotte gegeven door

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 \mathrm{l}}{\ln\left({R_{\mathrm{a}}}/{R_{\mathrm{b}}}\right)}$$

2. Oefening

In 1904 publiceerde J. J. Thomson een (incorrect) model voor het waterstofatoom. In dit model bevat het atoom een bolvormige wolk (straal R) met positieve lading $+e$ (deze lading is uniform verdeeld over de wolk), en een elektron (een deeltje met gelijke maar negatieve lading $-e$) in het middelpunt van de wolk.

a) Gebruik de wet van Gauss om aan te tonen dat het elektron in evenwicht is in het middelpunt van de wolk.

b) Toon aan dat indien het elektron verschoven zou worden weg van het middelpunt over een afstand $r < R$, het elektron een “herstellende” kracht zou ondervinden in de vorm $F = -Kr$. Bepaal ook de constante K.

c) Bereken het verloop van de potentiële energie van het elektron voor $0 < r < \infty$, en gebruik ook dit verloop om aan te tonen dat het elektron in evenwicht is in het middelpunt van de wolk.

a) Door gebruik te maken van de wet van Gauss hebben we dat

$$\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}$$

$$(4\pi r^2)\, E = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\frac{+e}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right)\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow (4\pi r^2)\, E = \left(\frac{e}{\varepsilon_0 R^3}\right) r^3$$

$$\Rightarrow E = \left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right) r$$

Dit elektrisch veld wijst radiaal naar buiten, wat betekent dat een negatief geladen deeltje naar het midden zal aangetrokken worden.

b) De kracht op een puntlading $q = -e$ op afstand r van het middelpunt wordt gegeven door

$$F = qE = -e\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)r = -\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)r = -Kr$$

$$K = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{ke^2}{R^3}$$

Er is dus een “herstellende” kracht die wijst naar het middelpunt.

c) Vertrekkend van het middelpunt hebben we voor $0 < r < R$ dat

$$\Delta U = -q\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

$$U_r - U_0 = e\int_0^r \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r\,\mathrm{d}r$$

$$U_r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^r$$

$$U_r = \frac{e^2 r^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

Voor $R < r < \infty$ hebben we dat

$$U_r - U_R = e\int_R^r \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r$$

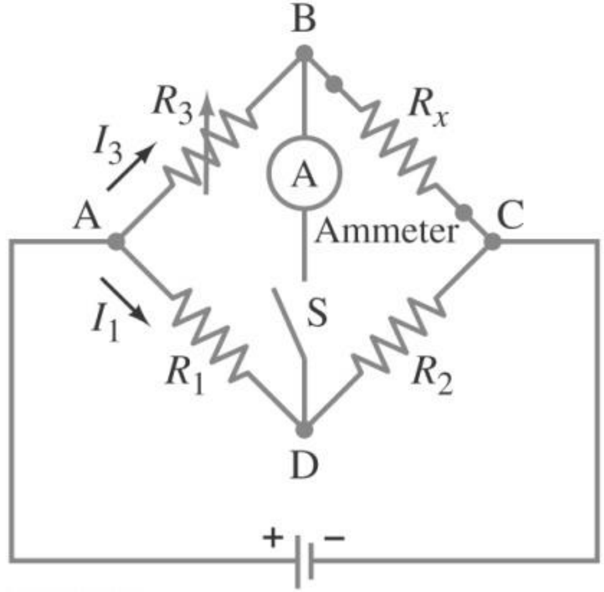
$$U_r = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{r}\right]_R^r$$

$$U_r = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 R} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

We zien dat de potentiële energie een monotoon stijgende functie van r is die minimaal (= 0) is in het centrum van de positieve ladingswolk ($r = 0$) en overal elders groter is. Het centrum is dus de meest stabiele positie van de negatieve lading $-e$.

3. Vier kortere vragen

1. Onderstaande figuur toont de zogenaamde brug van Wheatstone die toelaat om een onbekende weerstand te bepalen met behulp van drie gekende weerstanden R_1, R_2 en R_3 waarbij R_3 regelbaar is. Als de brug in evenwicht is, dit is als de stroommeter geen stroom detecteert bij het sluiten van de schakelaar S, dan wordt de onbekende weerstand R_x gegeven door het verband $R_x = R_2 \text{ x } R_3/R_1$. Maak gebruik van de regels van Kirchhoff om aan te tonen dat dit inderdaad het geval is.



- Als de brug in evenwicht is loopt er geen stroom tussen de punten B en D zodat $V_{\mathrm{B}} = V_{\mathrm{D}}$. Hieruit volgt dan dat het potentiaalverschil $V_{\mathrm{B}} - V_{\mathrm{A}}$ gelijk is aan het potentiaalverschil $V_{\mathrm{D}} - V_{\mathrm{A}}$. We hebben daarnaast ook dat het potentiaalverschil $V_{\mathrm{C}} - V_{\mathrm{B}}$ gelijk is aan het potentiaalverschil $V_{\mathrm{C}} - V_{\mathrm{D}}$.
- Door toepassing van de wet van Ohm krijgen we dan volgende vergelijkingen:

$$R_1 I_1 = R_3 I_3 \quad \text{en} \quad R_2 I_1 = R_x I_3$$

- Hierbij hebben we gebruik gemaakt van het feit dat dezelfde stroom I_1 loopt door de weerstanden R_1 en R_2 en dat dezelfde stroom I_3 loopt door de weerstanden R_3 en R_{x}. Uit twee bovenstaande vergelijkingen leiden we het gezochte resultaat af:

$$I_1 = \frac{R_3 I_3}{R_1} \quad \Rightarrow \quad R_2 \frac{R_3 I_3}{R_1} = R_x I_3 \quad \Rightarrow \quad R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1}$$

2. Twee identieke deeltjes met een massa van 4.5 mg en een lading van 30 nC bewegen recht naar mekaar toe met dezelfde snelheid van 4.0 m/s op het moment dat de afstand tussen beide deeltjes 25 cm is. Hoe ver zullen de deeltjes van mekaar verwijderd zijn op het moment dat ze het dichtst bij mekaar komen?

   a. 9.8 cm,
   b. 12 cm,
   c. 7.8 cm,
   d. 15 cm,
   e. 20 cm.

Mijn antwoord: c = 7.8 cm

Mijn verantwoording van het gekozen antwoord:

We maken gebruik van het behoud van energie (= kinetische energie + potentiële energie) en vergelijken de situatie in het begin met de situatie als de deeltjes het dichtst bij mekaar gekomen zijn, dit is als hun snelheid en dus ook hun kinetische energie nul is:

$$\text{totale energie} = 2 \times \frac{m v_0^2}{2} + \frac{k_e\, q^2}{r_0} = 0 + \frac{k_e\, q^2}{r_{\min}}$$

Zowel v_0 = 4.0 m/s als q = 30 nC en r_0 = 25 cm zijn gegeven. Uit bovenstaande vergelijking kunnen we dan de minimale afstand $r_{\min}$ berekenen en we vinden oplossing c.

3. Het “punteffect” kunnen we begrijpen door te berekenen hoe het elektrisch veld afhangt van de straal voor twee geladen metalen sferen die door een metalen draad met mekaar zijn verbonden. Bereken hoe het elektrisch veld afhangt van de straal van de sferen.

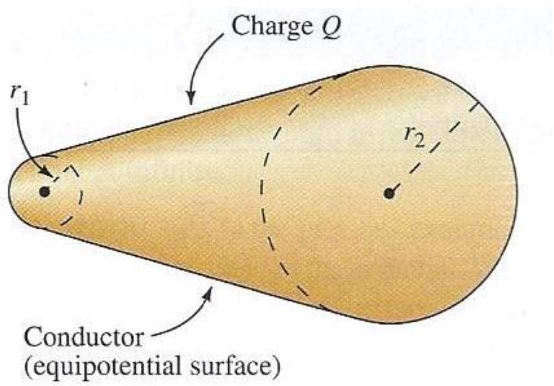
- Het “punteffect” komt er op neer dat voor het oppervlak van een metaal het elektrisch veld het grootst wordt waar de kromtestraal lokaal het kleinst is (aan scherpe punten).
- Voor een metalen sfeer met straal *r* en lading *Q* wordt de potentiaal van het oppervlak gegeven door

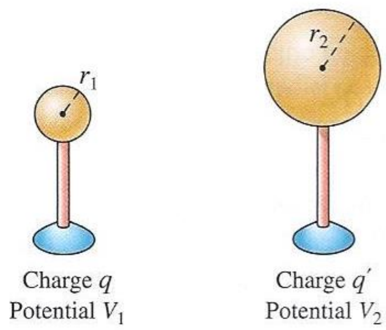
$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

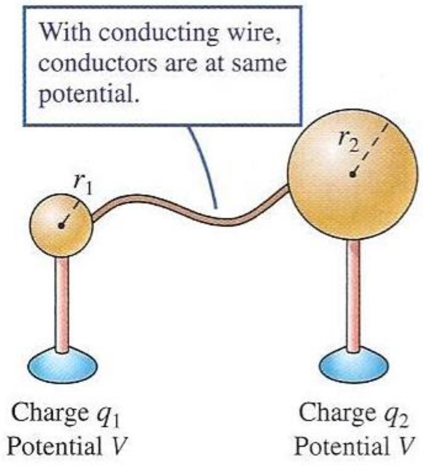
- De twee elektrisch verbonden sferen met verschillende straal r_1 en r_2 (zie figuur) bevinden zich op dezelfde potentiaal zodat voor de ladingsdichtheden σ en voor de elektrische velden E geldt dat:

$$\sigma_1 r_1 = \sigma_2 r_2 \qquad \text{en} \qquad \frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

Hierbij hebben we gesteund op het feit dat het elektrisch veld van een sfeer met ladingsdichtheid σ gegeven wordt door $E = \sigma/\varepsilon_0$.

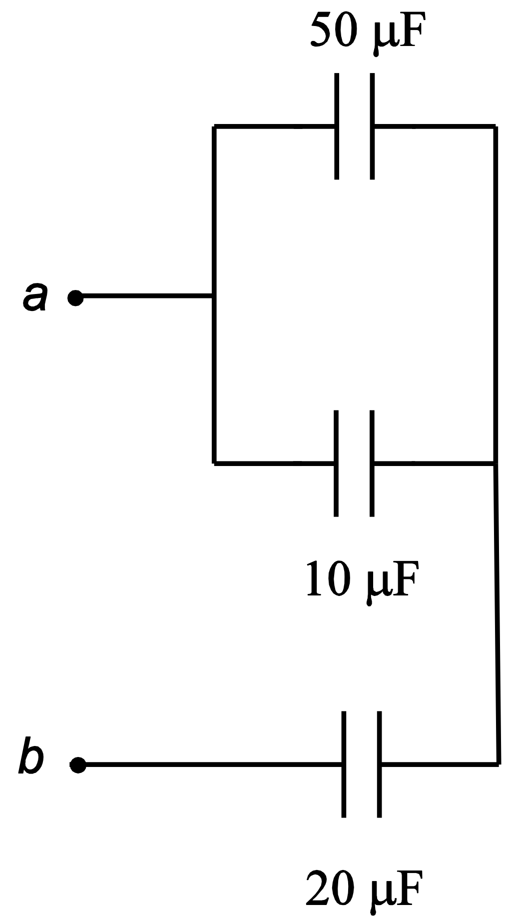






4. Wat is de totale energie die opgeslagen zit in de onderstaande groep van 3 condensatoren als het potentiaalverschil tussen de punten *a* en *b* gelijk is aan 50 V?

a. 48 mJ
b. 27 mJ
c. 37 mJ
d. 19 mJ
e. 10 mJ



Mijn antwoord: d = 19 mJ

Mijn verantwoording van het gekozen antwoord:

De bovenste condensatoren van 50 μF en 10 μF staan in parallel en kunnen vervangen worden door een equivalente condensator met capaciteit gelijk aan de som van de capaciteiten, dit is 60 μF. Deze equivalente condensator staat dan op zijn beurt in serie met de onderste condensator met een capaciteit van 20 μF. De condensatoren in serie kunnen we vervangen door een equivalente condensator met capaciteit (in μF) $1/C_{eq} = 1/60 + 1/20$. Hieruit berekenen we dan dat $C_{eq} = 120/8$ μF = 15 μF.

De totale opgeslagen energie wordt tenslotte gegeven door $U = C_{eq}V^2/2$ met $C_{eq} = 15$ μF en $V = 50$ V. Hieruit vinden we dat antwoord d het correcte antwoord is.