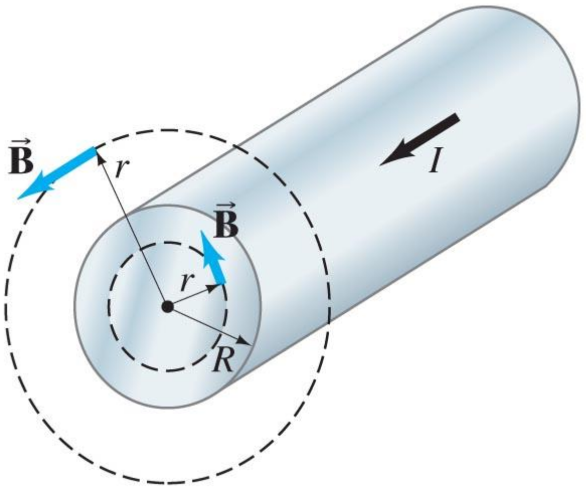
1. Langere vraag over de theorie

1. Bereken het magneetveld dat veroorzaakt wordt door een lange, cilindervormige stroomvoerende geleider met straal R en stroom I (uniforme stroomdichtheid) en dit zowel binnen als buiten de draad.
2. Bereken aan de hand van het resultaat voor deel (a) hoe de kracht tussen twee evenwijdige zeer lange, rechte stroomvoerende geleiders afhangt van de afstand tussen de twee geleiders, de lengte van de geleiders en de richting van de stromen.

Deze eerste vraag peilt naar het "kennen" van de leerstof. Het antwoord is dan ook direct terug te vinden in de be-treffende PowerPoint presentaties.

a) Veld veroorzaakt door een lange cilindervormige draad

- We willen het veld berekenen op een afstand r van het centrum van een draad met straal R die een constante stroom I voert en waarbij de stroom homogeen verdeeld is over de doorsnede van de draad.



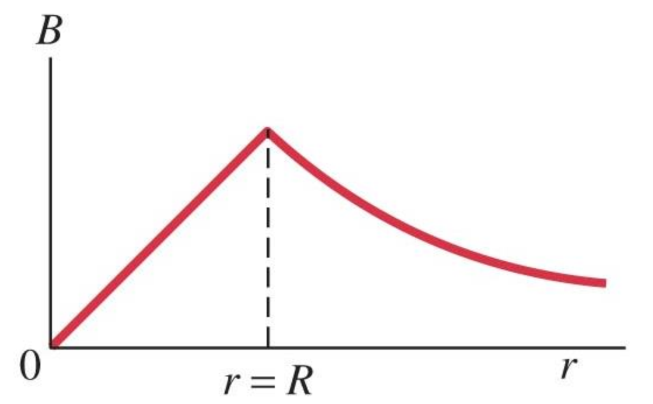
- Buiten de draad waar $r > R$ hebben we volgens de wet van Ampère:

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = B(2\pi r) = \mu_0 I_{\text{encl}}$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

a) Veld veroorzaakt door een lange cilindervormige draad, vervolg

- Binnen in de draad moeten we rekening houden met de stroom I_{encl} die door een Ampèriaanse lus (= cirkel met straal r) wordt omsloten. Daar de stroom homogeen verdeeld zit over de draad, geldt dat



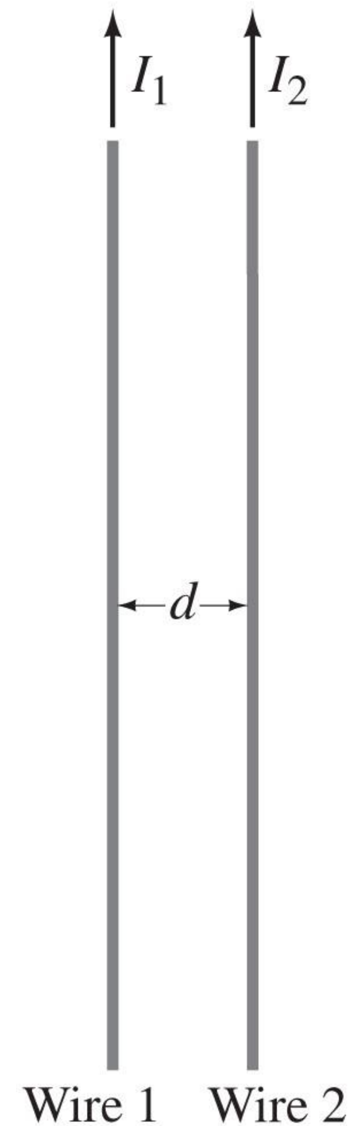
$$I_{\text{encl}} = I\,\frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

- Toepassen van de wet van Ampère levert

$$\oint \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\ell} = B(2\pi r) = \mu_0 I_{\text{encl}} = \mu_0 I\,\frac{\pi r^2}{\pi R^2} \quad\Rightarrow\quad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

- Het veld varieert evenredig met r binnen in de draad en varieert evenredig met $1/r$ buiten de draad.

b) Magnetische kracht tussen twee lange evenwijdige draden



- We berekenen nu de kracht tussen twee lange evenwijdige draden waardoor een stroom loopt. Deze berekening steunt op het feit dat het gaat om heel lange draden en we dan geen rekening dienen te houden met de uiteinden van de draden waar de krachten inhomogeen worden (veldlijnen spreiden zich uit)! Het veld dat ter hoogte van draad 2 geproduceerd wordt door draad 1, is (zie deel a) van de vraag)

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

b) Magnetische kracht tussen twee lange evenwijdige draden, vervolg 1

- Uit hoofdstuk 27 weten we dan hoe we de magnetische kracht F_2 moeten berekenen die door het veld van draad 1 wordt uitgeoefend op de stroomvoerende draad 2 met lengte ℓ_2:

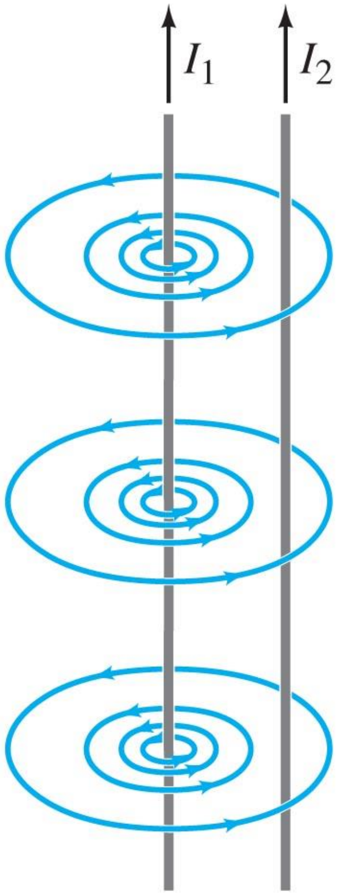
$$F_2 = I_2 B_1 \ell_2$$

- Invullen van de uitdrukking voor het magneetveld levert dan dat

$$F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \ell_2}{2\pi d}$$

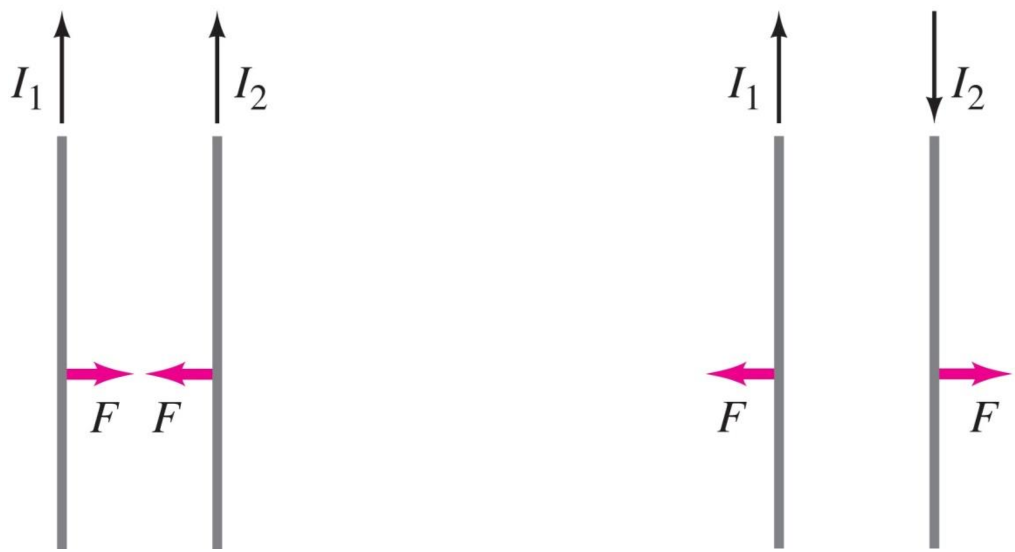
- Een analoge uitdrukking geldt voor de kracht F_1 uitgeoefend door het veld van draad 2 op draad 1:

$$F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \ell_1}{2\pi d}$$



b) Magnetische kracht tussen twee lange evenwijdige draden, vervolg 2

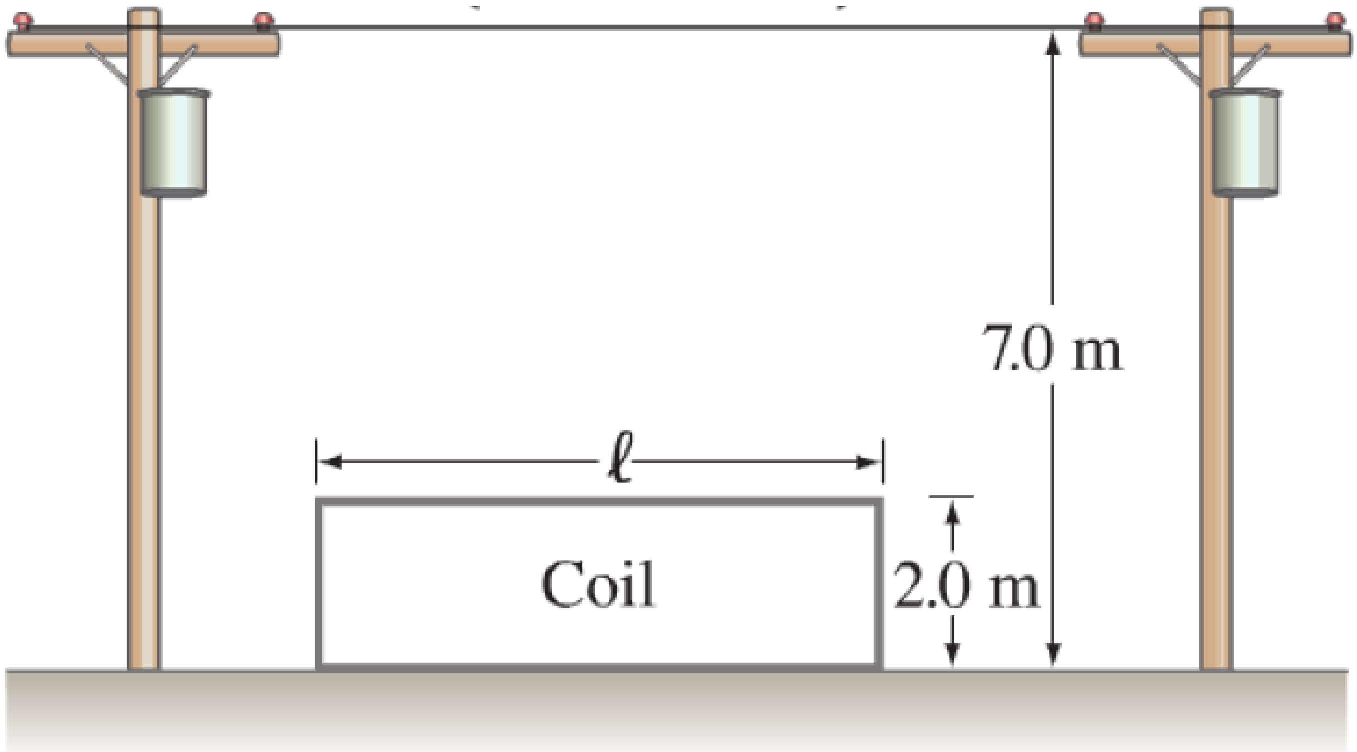
- We nemen dan aan dat de twee draden even lang zijn zodat $F_1 = F_2 = F$ (consistent met de 3de wet van Newton). Met de gepaste versies van de regel van de rechterhand vinden we dan dat de krachten naar mekaar toe wijzen als de stromen in dezelfde richting lopen en dat de krachten van mekaar wegwijzen als de stromen in tegengestelde richting lopen.



2. Oefening

Een elektriciteitskabel die een sinusoïdaal variërende stroom vervoert met een frequentie f = 60 Hz en een amplitude I_0 = 55 kA loopt op een hoogte van 7.0 m over het land van een boer in de Verenigde Staten van Amerika (zie figuur). De boer bouwt een verticaal geöriënteerde, 2.0 m hoge rechthoekige lus met 10 windingen onder de elektriciteitskabel. De boer hoopt om de geïnduceerde spanning in zijn rechthoekige lus te gebruiken om een toestel aan te sturen, waarvoor hij een sinusoïdaal variërende spanning nodig heeft met een frequentie f = 60 Hz en een amplitude V_0 = 170 V.

1. Hoe lang moet de rechthoekige lus daarvoor zijn?
2. Heeft deze constructie een gevolg voor de stroom door de elektriciteitskabel?


7.0 m
ℓ
Coil
2.0 m

1. De sinusoïdaal variërende stroom in de kabel veroorzaakt een sinusoïdaal variërend magnetisch veld rond de kabel dat gegeven wordt door vergelijking 28-1 op pagina 734 in het handboek van Giancoli. Vervolgens maken we gebruik van vergelijking 29-1b op pagina 760 en integreren dit magnetisch veld over het oppervlak van de rechthoekige windingen om de magnetische flux te bekomen door deze windingen. Na differentiëren van de flux zoals aangegeven in vergelijking 29-2b op pagina 761 om de geïnduceerde emk in de rechthoekige windingen te vinden, stellen we tenslotte de maximum emk gelijk aan 170 V. Hieruit kunnen we dan de gevraagde lengte van de rechthoekige windingen berekenen:

$$B(t) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \cos(2\pi f t)$$

$$\Phi_B(t) = \int B\, dA = \int_{5.0\mathrm{m}}^{7.0\mathrm{m}} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \cos(2\pi f t)\, \ell\, dr$$

$$= \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ell \cos(2\pi f t) \int_{5.0\mathrm{m}}^{7.0\mathrm{m}} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \ln(1.4)\, \ell \cos(2\pi f t)$$

$$\mathcal{E} = N \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{N \mu_0 I_0}{2\pi} \ln(1.4)\, \ell \left[\frac{d}{dt} \cos(2\pi f t) \right]$$

$$= -N \mu_0 I_0 f \ln(1.4)\, \ell \sin(2\pi f t)$$

$$\mathcal{E}_0 = N \mu_0 I_0 f \ln(1.4)\, \ell$$

$$\ell = \frac{\mathcal{E}_0}{N\mu_0 I_0 f \ln(1.4)}$$

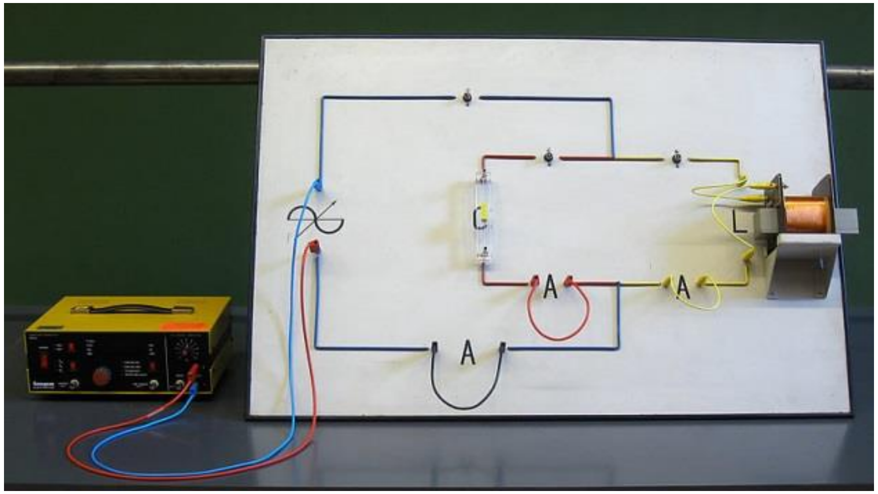
$$= \frac{170\,\mathrm{V}}{10\left(4\pi\times10^{-7}\,\frac{\mathrm{Tm}}{\mathrm{A}}\right)(55000\,\mathrm{A})(60\,\mathrm{Hz})\ln(1.4)} \quad [=\ 12\,\mathrm{m}]$$

2. Zoals aangegeven bij de aanvang van de evaluatie, moest het 2$^{\mathrm{de}}$ deel van de oefening enkel kort kwalitatief beantwoord worden, dit is in woorden zonder berekeningen.

   De inductie werkt in twee richtingen, dit wil zeggen dat er een wederzijdse inductie is. De rechthoekige lus met 10 windingen zal derhalve een tegenstroom induceren in de elektriciteitskabel. Dit stemt overeen met een afname van de energie die door de leverancier aan de klanten wordt geleverd via de elektriciteitskabel. De boer “steelt” dus vermogen / energie van de leverancier voor de werking van zijn toestel.

3. Vier kortere vragen

1. We bekijken het LC-circuit in onderstaande demoproef, waarbij de LC-kring gevoed wordt door een wisselspanningsbron. Indien L = 1 mH en de resonantiefrequentie 10/(2π) kHz is (bij deze frequentie gaan de lampjes die respectievelijk in serie staan met de condensator en met de smoorspoel, even hard branden), wat is dan de capaciteit C van de condensator? Hoe wijzigt de resonantiefrequentie als we het inwendige van de spoel opvullen met een ferromagnetisch materiaal met magnetische permeabiliteit $\mu = 16\mu_0$?



Resonantiefrequentie van het LC-circuit

- Het antwoord kunnen we direct vinden door gebruik te maken van de uitdrukking voor de resonantiefrequentie (zie formularium):

$$\omega = 2\pi f = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \Rightarrow \qquad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

- Gebruik maken van de voorhanden zijnde gegevens vinden we dan

$$\frac{10}{2\pi}\,\mathrm{kHz} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{LC} = 10^{-4}\,\mathrm{Hz}^{-1}$$

- We lossen dan op voor C en vinden

$$C = \frac{10^{-8}\,\mathrm{Hz}^{-2}}{10^{-2}\,\mathrm{H}} = 10^{-6}\,\mathrm{F} = 1\,\mu\mathrm{F}$$

- Als we de spoel opvullen met magnetisch materiaal, dan wordt het geproduceerde veld 16 keer groter en de inductantie L wordt dus ook 16 keer groter. Uit de uitdrukking voor de resonantiefrequentie volgt dan dat deze frequentie met een factor 4 wordt verlaagd.

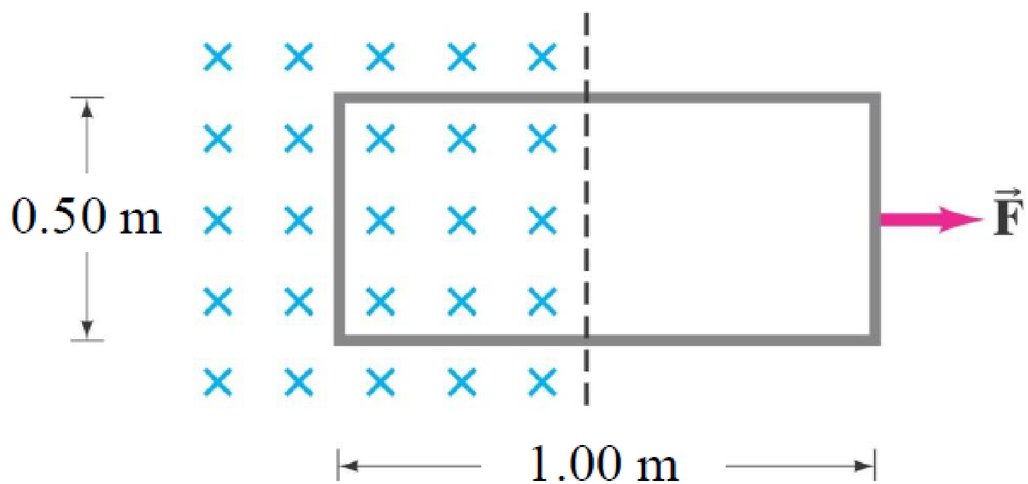
2. Een deel van een rechthoekig geleidend kader met een totale weerstand van 0.25 Ω en afmetingen gegeven in de figuur bevindt zich in een gebied met een uniform magneetveld van 1.0 T. Wat is de kracht die nodig is om het kader uit het veld te trekken (naar rechts) met een constante snelheid van 2.0 m/s?

   a. 0.5 N
   b. 1.0 N
   c. 2.0 N
   d. 4.0 N
   e. 0 N

Mijn antwoord: c

Kracht om het kader uit het magneeetveld te trekken: antwoord is oplossing (c)

Wanneer het kader uit het magneetveld wordt getrokken vermindert de magnetische flux door het kader. Hierdoor wordt er een emk geïnduceerd in het kader waarvan de grootte volgens de inductiewet van Faraday gegeven wordt door de verandering van de magnetische flux per eenheid van tijd. Omdat de flux gericht in het blad afneemt, zal de geïnduceerde flux in het blad wijzen. De geïnduceerde stroom loopt dan in uurwerkwijzerzin door het kader.



Kracht om het kader uit het magneeetveld te trekken: antwoord is oplossing (c), vervolg

De geïnduceerde stroom in het verticale gedeelte van de kader aan de linkerkant resulteert in een magnetische kracht die naar links gericht is. Om het kader te laten bewegen moet er dan een even grote uitwendige kracht uitgeoefend worden naar rechts die gegeven wordt door (zie hoofdstuk 27)

$$F = I\ell B = \frac{\mathcal{E}}{R}\ell B$$

Met behulp van de inductiewet van Faraday en wat er geschreven staat op pagina 765 in het handboek kunnen we dit verder uitwerken tot het gewenste resultaat:

$$F = \frac{\mathcal{E}}{R}\ell B = \frac{B^2\ell^2 v}{R} = \frac{(1.0\,\mathrm{T})^2(0.5\,\mathrm{m})^2(2.0\,\mathrm{m/s})}{0.25\,\Omega} = 2.0\,\mathrm{N}$$

3. Toon aan dat voor een transformator $M_2 = L_1$ x L_2, waarbij M de wederzijdse inductie is, en L_1 en L_2 de zelfinductie van de twee spoelen waaruit de transformator bestaat. Verliezen mogen verwaarloosd worden.

Verband tussen M, L_1 en L_2

We maken gebruik van de definities voor de verschillende inductanties (Φ is de magnetische flux die door de gemeenschappelijke magnetische kern van de transformator gaat):

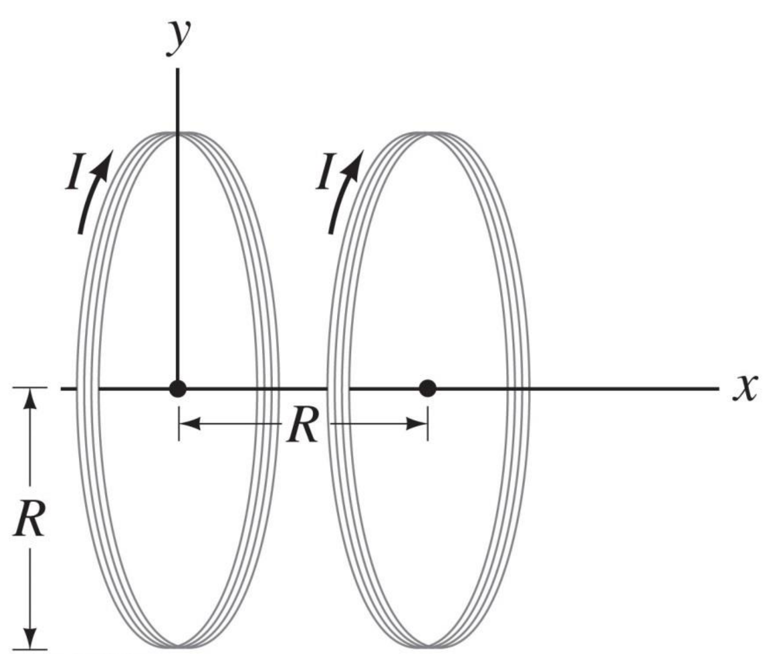
$$M = \frac{N_2\Phi}{I_1} = \frac{N_1\Phi}{I_2}$$

$$L_1 = \frac{N_1\Phi}{I_1}$$

$$L_2 = \frac{N_2\Phi}{I_2}$$

$$\Rightarrow \quad M^2 = \frac{N_2\Phi}{I_1} \times \frac{N_1\Phi}{I_2} = L_1 \times L_2$$

4. Beschouw de twee zogenaamde Helmholtz-spoelen getoond in de figuur die ieder een straal R hebben en ieder bestaan uit N windingen. Het middelpunt van de linkse spoel bevindt zich bij $x = 0$ en het middelpunt van de rechtse spoel bevindt zich bij $x = R$. Bereken het magneetveld halverwege de verbindingslijn tussen de twee middelpunten van de spoelen (bij $x = R/2$).



Berekening van het magneetveld bij $x = R/2$

Rekening houdend met de omloopzin van de stromen, mogen we de magnetische velden van de twee spoelen bij mekaar optellen. Voor ieder van de spoelen kunnen we gebruik maken van het resultaat van de berekening van het magneetveld in voorbeeld 28-12 voor een stroomvoerende ring met straal *R* (pagina 744 in het handboek van Giancoli) langsheen de as van de ring (dit resultaat is ook opgenomen in het formularium):

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

met x de afstand vanaf het middelpunt van de ring. Zowel voor de linkse als voor de rechtse spoel moeten we $x^2 = R^2/4$ invullen. Het totale veld dat we zoeken wordt dan, rekening houdend met de N windingen, gegeven door

$$B = \frac{N\mu_0 I R^2}{2\left(R^2 + \frac{R^2}{4}\right)^{3/2}} + \frac{N\mu_0 I R^2}{2\left(R^2 + \frac{R^2}{4}\right)^{3/2}} = \frac{N\mu_0 I R^2}{\left(R^2 + \frac{R^2}{4}\right)^{3/2}}$$