Examen Complexe Analyse
maandag 27 augustus 2012, 14:00–18:00 uur
Lokaal 200B.00.18

Naam:

Studierichting:

- Het examen bestaat uit 4 schriftelijke vragen.
- Elke vraag telt even zwaar mee.
- Het boek “Function Theory of one Complex Variable” van Greene & Krantz mag gebruikt worden, evenals de extra beschikbaar gestelde nota's.
- Uitgewerkte oefeningen en ander materiaal uit de oefenzitting mag niet gebruikt worden.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- Succes!

Vraag 1 (a) Zet de integraal

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\theta}{a+\cos\theta} d\theta, \qquad a > 1.$$

om naar een integraal over de eenheidscirkel en bereken de integraal. Schrijf uw antwoord in een vorm waaruit het duidelijk is dat de integraal reëel en positief is.

(b) Bereken

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(x)}{1+x^2}\, dx.$$

Vraag 2 Voor $a, b \in \mathbb{C}$ en $R > \max(|a|, |b|)$ beschouwen we de integraal

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz.$$

(a) Bereken de integraal als gegeven is dat f holomorf is op het gebied $D(0, R+\varepsilon)$ voor zekere $\varepsilon > 0$. [Uw antwoord hangt af van $f(a)$ en $f(b)$.]

(b) Bereken de integraal als gegeven is dat f holomorf en begrensd is op het gebied $\mathbb{C} \setminus D(0, R-\varepsilon)$ voor zekere $\varepsilon > 0$.

(c) Gebruik (a) en (b) om een alternatief bewijs voor de stelling van Liouville te geven.

Vraag 3 Zij $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ en $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$. Zij

$$f : \big(\mathbb{C}^+ \cup \,]-1,1[\,\big) \to \mathbb{C}$$

een continue functie waarvoor geldt dat de beperking van f tot $\mathbb{C}^+$ holomorf is.

(a) Welke van de volgende functies, die gedefinieerd zijn voor $z \in \mathbb{C}^-$ zijn holomorf op $\mathbb{C}^-$?

$$g_1(z) = f(\overline{z}), \qquad g_2(z) = \overline{f(\overline{z})}, \qquad g_3(z) = \overline{f(z)}.$$

Licht uw antwoord toe.

(b) Neem aan dat $f(x)$ reëel is voor elke $x \in \,]-1,1[$. Laat zien dat f een analytische voortzetting heeft tot $\mathbb{C} \setminus (\,]-\infty,-1] \cup [1,\infty[\,)$.

(c) Neem aan dat $f(x)$ reëel is voor elke $x \in \,]-1,1[$ en dat bovendien geldt dat $\operatorname{Im} f(z) > 0$ voor alle $z \in \mathbb{C}^+$. Bewijs dat de beperking van f tot $]-1,1[$ strikt stijgend is.

Vraag 4 Beschouw het gebied

$$U = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0, \text{ en } |z + 4i| < 4\sqrt{2} \right\}.$$

(a) Schets U. Laat zien dat de rand van U een hoek maakt van $\pi/4$ in $z = \pm 4$.

(b) Geef een Möbiustransformatie die U afbeeldt op een sector

$$S_\theta = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg z < \theta\}$$

voor zekere $\theta > 0$. Wat is θ?

(c) Bepaal een conforme afbeelding van U naar de eenheidsschijf $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Zorg er tevens voor dat $i \in U$ afgebeeld wordt naar de oorsprong.