Examen Complexe Analyse
maandag 26 augustus 2013, 14:00–18:00 uur
B.00.16

Naam:

Studierichting:

- Het examen bestaat uit 4 schriftelijke vragen.
- Elke vraag telt even zwaar mee.
- Het boek "Function Theory of one Complex Variable" van Greene & Krantz mag gebruikt worden, evenals de extra beschikbaar gestelde nota's.
- Uitgewerkte oefeningen en ander materiaal uit de oefenzitting mag niet gebruikt worden.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Kladpapier wordt niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- Succes!

Vraag 1

4pt (a) Zet de integraal

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+\cos t)^2}\,dt, \qquad a > 1$$

om naar een integraal over de eenheidscirkel $C(0,1)$. Wat zijn de singulariteiten van de functie die we dan integreren?

6pt (b) Bereken de integraal uit (a).

Vraag 2 Neem $r \in \mathbb{R}$ en beschouw

$$U_r = \mathbb{C} \setminus (-\infty, r]$$

5pt (a) Bepaal een conforme afbeelding van U_r naar de eenheidsschijf $D(0, 1)$.

5pt (b) Neem aan dat $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ een holomorfe functie is met $f(\mathbb{C}) \subset U_r$. Bewijs dat f constant is.

Vraag 3

5pt (a) Neem aan dat (p_n) een rij veeltermen is waarvoor geldt dat

$$\lim_{n\to\infty} p_n(z) = 1 \qquad \text{uniform voor } z \in C(0,1)$$

waarin $C(0,1)$ de eenheidscirkel is. Gebruik het maximumprincipe om te laten zien dat

$$\lim_{n\to\infty} p_n(z) = 1 \qquad \text{uniform voor } z \in D(0,1).$$

5pt (b) Laat zien dat er een $\varepsilon > 0$ bestaat waarvoor geldt dat

$$\max_{z\in C(0,1)} \left| p(z) - \frac{1}{z} \right| \geq \varepsilon.$$

Vraag 4 Zij $a > 0$ en definieer

$$f(z) = \frac{\log z}{z^2 + a^2}$$

met $\log z = \log |z| + i \arg z$, $-\pi < \arg z \leq \pi$.

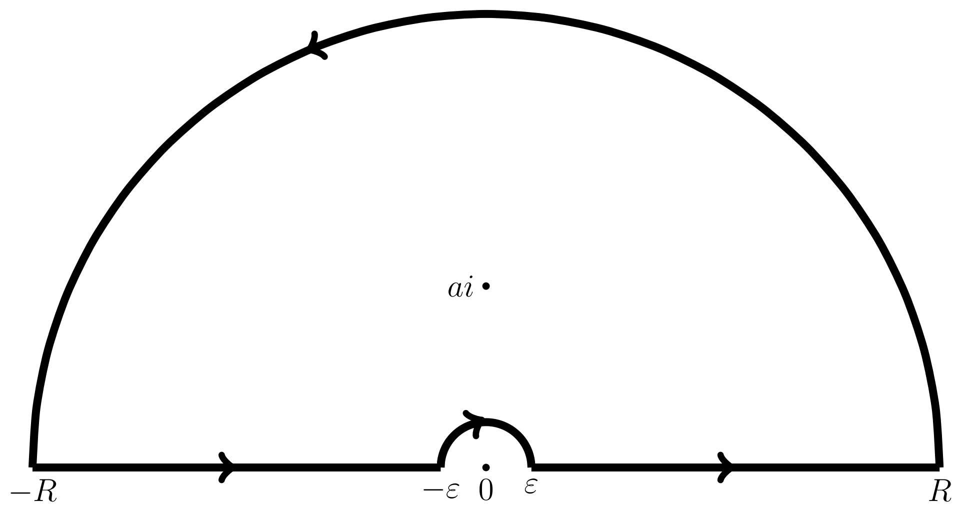
3pt (a) Bereken $\oint_\gamma f(z)dz$ waarin $f(z) = \frac{\log z}{z^2+a^2}$, waarin γ de contour is zoals in de figuur met $0 < \varepsilon < a < R$.

3pt (b) Beargumenteer nauwkeurig dat de bijdragen van de halve cirkels met straal ε en R aan de integraal $\oint_\gamma f(z)dz$ naar nul gaan, als $\varepsilon \to 0+$ en $R \to +\infty$.

4pt (c) Bepaal

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + a^2} dx \qquad \text{met } a > 0.$$

Geef uw antwoord in een vorm waaruit duidelijk blijkt dat het antwoord reëel is.



Contour γ behorende bij Vraag 4.