

BRI EXAM 2022-2023

Prof H. Blockeel

Liam Luys

KU Leuven

Veel succes met het examen!

Ik heb geprobeerd een samenvatting te maken van de cursustekst.

Geen garantie dat alles er in staat en/of juist is, doe zeker de boeken ook open.

Foutje gevonden? Laat het zeker weten, dan pas ik het aan!

1. Verzameling

1.1 Verzameling

Verzameling = Object dat naar groep individuen/elementen als geheel verwijst

Elementen = Individuen die deel uitmaken van de verzameling, lid van de verzameling

Eigenschappen

- Individu kan geen twee keer lid zijn
- Verzameling kent geen volgorde voor elementen
- Indien verzamelingen exact zelfde elementen hebben zijn ze gelijk

Definitie verzameling

- Opsomming
 - o Termen/namen van elementen opsommen
 - o Tussen accolades, gescheiden door komma's
 - o Mogelijkheid inkorten door "..." bij patroon in een opsomming
 - o Mogelijkheid oneindig door "..." bij uiteinde van opsomming
- Omschrijving
 - o Omschrijving = beschrijving op basis van een aantal eigenschappen
 - o Alle elementen die aan omschrijving voldoen behoren tot verzameling
 - o --> Moeilijk om correct en duidelijk te omschrijven

Oplossing voor onduidelijke omschrijving?

- Wiskundige notatie van een variabele
- $\{x \mid x \text{ een geheel getal tussen } 1 \text{ en } 45\}$ (de verzameling van alle gehele getallen x die tussen...)

Grafische Voorstelling

- Venn Diagram
 - o Overzichtelijke schematische weergave van een verzameling(en)

Notatie

- Verzamelingen met hoofdletter aangeven
- x is element van K : $x \in K$
- x is geen element van K : $x \notin K$

1.2 Speciale verzamelingen

- **Lege Verzameling**
 - o Geen enkel element
 - o Notatie $\emptyset$
 - o Gebruikt om er naar te verwijzen
- **Singletons en Paren**
 - o Singleton = Verzameling met één element
 - Let op dat $\{3\} \neq 3$
 - o Paar = Verzameling met twee elementen
- **Oneindige Verzameling**
 - o Oneindige verzameling = Verzameling waarvan de opsomming nooit eindigt

- Eindige verzameling = Alle verzamelingen die niet oneindig zijn

- **Andere bijzondere Verzamelingen**

- Natuurlijke getallen $\mathbb{N}$
- Gehele getallen $\mathbb{Z}$
- Rationale Getallen $\mathbb{Q}$
- Reële Getallen $\mathbb{R}$
 - Interval = Verzameling reëel getallen

Booleaanse Waarde in verzameling B

- $\{\text{waar, onwaar}\} / \{1, 0\}$

1.3 Deelverzameling

Verzameling is deelverzameling van een andere verzameling als al haar elementen ook in de andere voorkomen

- Onduidelijke definitie? "Haar", "De"?

Oplossing --> Naamgeving bij meerdere elementen

Voordelen introductie namen in definities

- Efficiëntere structuren
- Kortere notaties
- Duidelijkheid

"Verzameling A is een deelverzameling van een verzameling B als en slechts als elk element uit A ook voorkomt in B "

Notatie symbolen: $A \subseteq B$

Strikte deelverzameling: A is deelverzameling van B en niet gelijk aan B

Notatie symbolen: $A \subset B$

Notatie	Uitspraak
$A = B$	A is gelijk aan B
$A \neq B$	A is niet gelijk aan B A verschilt van B
$A \subseteq B$	A is een deelverzameling van B
$A \not\subseteq B$	A is geen deelverzameling van B
$A \subset B$	A is een strikte deelverzameling van B
$A \not\subset B$	A is geen strikte deelverzameling van B

1.4 Operaties op verzamelingen

- **Doorsnede**

- Verzameling die alle elementen bevat die zowel in A als in B zitten, en geen andere
- $A \cap B$

- **Vereniging / Unie**

- Verzameling die alle elementen van A bevat, alle elementen van B , en geen andere
- $A \cup B$

- **Verschil**

- Verzameling die alle elementen van A die niet in B voorkomen bevat
- $A \setminus B$
- **Symmetrisch Verschil**
 - Verzameling alle elementen die in de ene verzameling, maar niet in de andere voorkomen
 - $A \Delta B$
 - $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
- **Complement**
 - Verzameling van alle individuen die geen element van A zijn
 - $A^c = U \setminus A$
 - U = Universum, afhankelijk en bepaald door context
- **Venn-Diagram**
 - Visueel voorstellen van meerdere verzamelingen, helpt bij interpretatie en oefeningen met operaties!

Notatie	Uitspraak
$A \cup B$	de unie van A en B
$A \cap B$	de doorsnede van A en B
$A \setminus B$	A min B
$A \Delta B$	het symmetrisch verschil van A en B
A^c	het complement van A

1.5 Complexe Uitdrukkingen

Regels bij volgorde van operaties

1. Deeluitdrukking kan tussen haakjes staan en wordt eerst uitgerekend
2. Complement operator wordt uitgerekend na haakjes
3. Doorsnede, unie en (symmetrisch) verschil van links naar rechts --> Geen voorrang!

Uitdrukking = Manier om iets op te schrijven, berekeningswijze

Resultaat = Verzameling

Equivalenten uitdrukkingen = Uitdrukkingen die steeds zelfde resultaat geven

1.6 Rekenregels

- Als $A = B^c$, dan $B = A^c$ (Complement)
- $(A^c)^c = A$ (Complement van complement)
- $A \cup B = B \cup A$ (Commutatieve eigenschap unie)
- $A \cap B = B \cap A$ (Commutatieve eigenschap doorsnede)
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (Associatieve eigenschap unie)

Korte notatie voor unie (mogelijk door associativiteit)

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Associatieve eigenschap doorsnede)

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \rightarrow A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

- Oneindige verzamelingen: zie p22

Notatie	Uitspraak
$\bigcup_{i=1}^n A_i$	de unie van alle A_i , voor i van 1 tot n
$\bigcap_{i=1}^n A_i$	de doorsnede van alle A_i , voor i van 1 tot n
$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$	de unie van alle A_i , voor $i = 1, 2, 3, \dots$
$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$	de doorsnede van alle A_i , voor $i = 1, 2, 3, \dots$
$\bigcup_{i \in I} A_i$	de unie van alle A_i , voor $i \in I$
$\bigcap_{i \in I} A_i$	de doorsnede van alle A_i , voor $i \in I$

- Distributiviteit van $\cap$ over $\cup$
 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

- De Wetten van Morgan

- o Het complement van de unie is de doorsnede van de complementen
 - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- o Het complement van de doorsnede is de unie van de complementen
 - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

- Meerdere keren dezelfde verzameling

- o voor alle verzamelingen A en B geldt: $(A \cup B) \cup B = A \cup B$.
- o voor alle verzamelingen A en B geldt: $(A \cap B) \cap B = A \cap B$.
- o voor alle verzamelingen A en B geldt: $(A \setminus B) \setminus B = A \setminus B$.

Het heeft geen zin om meerdere keren dezelfde elementen toe te voegen

- Andere eigenschappen

- $A \subseteq A \cup B$
- $A \cap B \subseteq A$
- $A \setminus B \subseteq A$
- als $A \subseteq B$, dan geldt $A \cup B = B$
- als $A \subseteq B$, dan geldt $A \cap B = A$
- als $A \subseteq B$, dan geldt $A \cap B^c = \emptyset$

Samenvatting 1.6

doorsnede	unie
$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \emptyset = A$
$A \cap B \subseteq A$	$A \subseteq A \cup B$
als $A \subseteq B$, dan $A \cap B = A$	als $A \subseteq B$, dan $A \cup B = B$
$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
verschil	complement
$A \setminus A = \emptyset$	$U = \emptyset^c$
$A \setminus \emptyset = A$	$A \cup A^c = U$
$A \setminus B \subseteq A$	$A \cap A^c = \emptyset$
als $A \subseteq B$, dan $A \setminus B = \emptyset$	$A \setminus B = A \cap B^c$
$A \Delta B = B \Delta A$	$(A^c)^c = A$
gemengd	
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$	$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

1.7 Verzamelingen van Verzamelingen

Elementen van verzameling kunnen ook zelf een verzameling zijn!

Als A en B verzamelingen zijn, en V de verzameling waarvoor geldt dat $A \in V$ en $B \in V$

Het is niet zo dat alle elementen uit A element zijn van de verzameling V, enkel A als verzameling is een element!

Machtsverzamelingen

Machtsverzameling van A $\mathcal{P}(A)$ = Verzameling van alle deelverzamelingen van A

Notatie	Uitspraak
$\mathcal{P}(A)$	de machtsverzameling van A

Nagekeken en vervolledigd op 24/10/2022

2. Precieze Uitspraken formuleren

2.1 Precieze en minder precieze uitspraken

Nederlands = Niet duidelijk

- Vaak dubbelzinnig, en afhankelijk van context
- Grammaticale wijzigingen verschuift de betekenis, zo is interpretatie belangrijk.

Oplossing: wiskundige uitdrukkingen die niet dubbelzinnig zijn of niet verkeerd geïnterpreteerd kunnen worden.

2.2 Beweringen

Bewering / Propositie = Uitspraak die waar of onwaar kan zijn

- Vaak met context en in zin-vorm
- Aangeduid met standaard P of Q

Precisie inbouwen

- Gebruik van woorden of symbolen die duidelijk zijn afgesproken
- Amen gebruiken voor dingen waarover we spreken
- Logica gebruiken

Basisproposities = Beweringen die we samenstellen tot nieuwe bewering

- $\wedge$ Conjunctie --> "en", de bewering is waar als beide beweringen waar zijn (Waarheidstabel)
- $\vee$ Disjunctie --> "of", de bewering is waar als één of beide beweringen waar zijn (inclusieve of)
- $\neg$ Ontkenning --> Waar als de bewering onwaar is
- $\Rightarrow$ Implicatie --> "Als P waar is, dan is ook Q waar" (Niet perse oorzakelijk verband)
- $\Leftrightarrow$ Equivalentie --> Als beide waar of onwaar zijn

Logische formules --> uitdrukkingen in formules en symbolen uitgeschreven

Exclusieve 'of': $P \text{ xor } Q$

- Het ene of het andere, maar niet beide tegelijk

Prioriteit van operatoren: niet, en, of, alsdan, asa

Modus Ponens

- Als je weet dat P waar is, en $P \Rightarrow Q$ is waar, dan is Q waar
- $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$

Modus Tollens

- Als Q onwaar is, en $P \Rightarrow Q$ waar is, dan is P onwaar
- $(\neg Q \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow \neg P$

Interpretatie van de implicatie

- Niet altijd gelijk met wat we denken
- "Als ik een pint op heb, kan ik vliegen" is wel waar als je geen pint op hebt, hoewel het niet logisch klinkt in onze taal

2.8 Complexe Beweringen

Bij gebruik van meerdere operatoren --> Volgorde prioriteit

Hoge prioriteit: $\neg$ $\wedge$ $\vee$ $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$: Lage prioriteit

2.9 Waarheidstabellen

Logisch Equivalent = Indien onder alle mogelijke omstandigheden 2 beweringen gelijke resultaten opleveren

- Gemakkelijk zichtbaar via de waarheidstabellen, kolommen vergelijken
- Aangeduid door symbool $\equiv$

Tautologie = Is altijd waar

Contradictie = Is nooit waar

2.10 Kwantificatie

Kwantificatie

- Universeel gekwantificeerd
 - o Voor alle elementen in een context
 - o Symbool $\forall$
- Existentieel gekwantificeerd
 - o Voor minstens één element in een context
 - o Symbool $\exists$
- Exact één element
 - o Voor exact één element in een context
 - o Symbool $\exists!$
- Ontkenning
 - o Voor geen enkel element in een context
 - o Symbolen $\nexists$ of $\neg$

Kwantoren

- Universele kwantor: $\forall$
- Existentiële kwantor: $\exists$

2.11 Geparametriseerde Beweringen / Predikaat

Achter naam van bewering tussen haakjes zetten waarnaar de bewering verwijst

- $P(x)$
- Stel $P(x,y)$: "x is het dubbel van y", kunnen we opschrijven dat $P(6,3)$

Verzameling is geen bewering!

- Verzameling A
 - o x is element van A
- Bewering B
 - o x voldoet aan B (geen element van B!!!)

Werken met kwantoren

- Universele Kwantificatie --> Implicatie gebruiken
- Existentiële Kwantificatie --> Conjunctie gebruiken

(zie p44)

2.12 Naamgeving

Geef een naam aan elk object dat je introduceert!

2.13 Samenvatting

Notatie	Uitspraak
$P \wedge Q$	P en Q
$P \vee Q$	P of Q
$\neg P$	niet P
$P \Rightarrow Q$	P impliceert Q als P , dan Q
$P \Leftrightarrow Q$	P als en slechts als Q P is equivalent met Q
$\forall x \in S : P$	voor alle x in S geldt P
$\exists x \in S : P$	er bestaat een x in S waarvoor P geldt
$\exists! x \in S : P$	er bestaat precies één x in S waarvoor P geldt
$\nexists x \in S : P$	er bestaat geen x in S waarvoor P geldt

2.14 Logische Rekenregels

Tautologieën ($\equiv$ waar)	Contradicties ($\equiv$ onwaar)
$P \vee \neg P$	$P \wedge \neg P$
$P \Rightarrow P$	
$P \Leftrightarrow P$	
$P \wedge Q \Rightarrow P$	
$P \Rightarrow P \vee Q$	
Logische equivalenties	
$P \wedge P \equiv P$	
$P \vee P \equiv P$	
$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	
$P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$	
$P \Leftrightarrow Q \equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)$	
$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$	
$\neg(\neg P) \equiv P$	
$P \wedge \text{waar} \equiv P$	
$P \vee \text{waar} \equiv \text{waar}$	
$P \wedge \text{onwaar} \equiv \text{onwaar}$	
$P \vee \text{onwaar} \equiv P$	
$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	commutativiteit van $\wedge$
$P \vee Q \equiv Q \vee P$	commutativiteit van $\vee$
$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$	associativiteit van $\wedge$
$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$	associativiteit van $\vee$
$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	distributiviteit van $\wedge$ over $\vee$
$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	distributiviteit van $\vee$ over $\wedge$
$P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$	De Morgan
$P \vee Q \equiv \neg(\neg P \wedge \neg Q)$	De Morgan

Nagekeken en vervolledigd op 25-10-2022

3. Opbouw van Theorieën

Theorie = Beschrijving van algoritme over een bepaalde oplossingsmethode of structuur.

3.1 Definities

Definitie = Element van de theorie waarin we een nieuwe term of symbool introduceren

- Eenduidige betekenis
- Geen twijfel mogelijk
- Altijd juist, je geeft een betekenis aan een term, die nooit fout kan zijn.

3.2 Naamgeving en notatie

Lokale verwijzingen = Beschikbaar in de definitie zelf

Globale verwijzingen = Overal beschikbaar.

Afspraak rond notatie

- Een afspraak die altijd zal gelden.
- Voorbeelden
 - o De lege verzameling noteren we als $\emptyset$

3.3 Eigenschappen

Bewering = zin die waar of onwaar kan zijn

Eigenschap = Bewering die binnen een theorie steeds waar is.

3.4 Axioma's

Axioma = Basiseigenschap die niet uit andere definities komen en dus "aangenomen" wordt.

Axioma's en definities liggen aan de basis van elke theorie!

3.5 Bewijzen

Bewijs = Redenering die onomstotelijk aantoont dat een bepaalde bewering waar is.

- Moet goed onderbouwd zijn en gedetailleerd uitgewerkt zijn.

Bewijsschets = Genoeg info geven zodat de lezer zelf het bewijs kan uitwerken

3.6 Stellingen

Stelling = Belangrijke bewering waarvan bewezen is dat deze waar is.

- De bewering vormt een belangrijk onderdeel binnen een theorie

Onderdelen stelling

- Het gegeven: bewering(en) waarvan bekend is dat ze waar zijn of aangenomen worden
- Te bewijzen: bewering die je wil bewijzen
- Het bewijs

Soorten Stellingen

- Vermoeden
 - o Er is een sterk vermoeden dat een stelling waar is, maar deze is (nog) niet bewezen

- Lemma / Hulpstelling
 - o Vormen bouwblokken om andere stellingen te bewijzen
- Collorarium / Gevolg / Corollary
 - o Een bewijs van de stelling volgt (bijna) rechtstreeks uit het bewijs van een ander stelling

3.7 Nummering en Naamgeving

Stellingen nummeren --> Handiger om achteraf te verwijzen naar de stelling

Nummering = Vorm van lokale naamgeving

Stellingen die vaak gebruikt worden krijgen een eigen naam

- Vorm van globale naamgeving
- Vb: Stelling van Pythagoras

3.8 Toepassing: Verzamelingenleer

Zie cursus

3.9 Toepassing: Kansrekening

/

Oefeningen!

4. Bewijstechnieken

4.1 Bewijzen in de Informatica

Informatica --> Zoeken naar een algoritme voor een probleemoplossing

Hoe bewijzen dat je algoritme voor elke mogelijke situatie klopt?

- Algoritme en probleem kunnen beschrijven op formele manier
- Vrij ingewikkeld!

Correctheidsbewijs: Werkt je programma altijd?

Eindigheidsbewijs: Eindigt het altijd?

Probleem = Precieze beschrijving van algemene taak

Instantie van probleem = Combinatie van het probleem en een specifieke invoer ervoor

4.2 Bewijzen door vaststelling

Correctheid van bewering vaststellen zonder een redenering

Meerdere manieren

- Vaststellen: waarheidstabellen, ...
- Constructie
- Tekening
- Venndiagram

Opletten dat steeds alle mogelijke situaties worden voorgesteld!

Gebruik 'elke' en 'willekeurige'

4.3 Elementaire Stappen In een Bewijs

Vaak is bewijs complexer en kan bewezen worden uit andere bewijzen of vaststellingen.
Welke stappen zijn mogelijk om tot ons bewijs te komen?

4.3.1 Substitutie

Een deel van de uitdrukking vervangen door iets anders met dezelfde betekenis

Regels Substitutie

- Universeel gekwantificeerde variabele vervangen door een uitdrukking
- Uitdrukking vervangen door equivalente uitdrukking

Vaak mogelijk om bewijs te voeren door combinatie van deze regels

4.3.2 Gebruik de definitie

Vervang een uitdrukking of onderdeel door de definitie ervan.

--> vaak een goede eerste stap voor een bewijs

4.3.3 Modus Ponens

Als P waar is, en $P \Rightarrow Q$ is waar, dan volgt daaruit dat Q waar is

4.4 Bewijsstrategieën

Hoe meerdere stappen combineren tot een bewijs?

4.4.1 Ketens van (on)gelijkheden, implicaties of equivalenties

Als $x=y$ en $y=z$, dan $x=z$ (ook bij $\Rightarrow$ en $\Leftrightarrow$)

4.4.2 Wederzijdse implicatie

Uit $P \Rightarrow Q$ en $Q \Rightarrow P$ volgt dat $P \Leftrightarrow Q$

Om equivalentie te bewijzen --> beide implicaties bewijzen

4.4.3 Inclusie en gelijkheid van verzamelingen

Zie cursus

4.4.4 Herhaalde Gevolgtrekking

4.5 Gevalsonderscheid

Als probleem complex of moeilijk in geheel op te lossen is, kunnen we het opsplitsen in kleinere deelproblemen.
Deelproblemen kunnen we elk op hun beurt apart oplossen en samen de oplossing maken.

- Bewijs dat voor alle verzamelingen A, B geldt: $A \Delta B \subseteq A \cup B$

- Bewijs:

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Neem een willekeurige x . Dan geldt (per definitie van $\cup$) $x \in A \setminus B$ of $x \in B \setminus A$. We beschouwen beide mogelijkheden apart.

Geval 1: $x \in A \setminus B$. We weten $A \setminus B = A \cap B^c \subseteq A \subseteq A \cup B$, dus volgt hieruit $x \in A \cup B$.

Geval 2: $x \in B \setminus A$. We weten $B \setminus A = B \cap A^c \subseteq B \subseteq A \cup B$, dus volgt ook hier $x \in A \cup B$.

Zowel in geval 1 als 2 vinden we $x \in A \cup B$. Voor elke $x \in A \Delta B$ geldt dus $x \in A \cup B$, en bijgevolg geldt $A \Delta B \subseteq A \cup B$.

4.6 Implicaties Bewijzen

Als je $P \Rightarrow Q$ moet bewijzen kan je best bewijzen op manier:

Beschouw afzonderlijk de gevallen waarin P waar en Onwaar is

- Geval 1: P is onwaar
 - Dan is $P \Rightarrow Q$ triviaal waar
- Geval 2: P is waar
 - Dan moet voor elke Q ook gelden dat deze waar is.
We nemen aan dat P waar is en leiden daaruit af dat Q waar is

4.7 Bewijs uit het ongerijmde

Bewijs door een contradictie $\rightarrow$ We bewijzen dat het omgekeerde onwaar is, en het bewijs dus waar is

- Dit kan door de Modus Tollens!

4.8 Bewijs door inductie

Om te bewijzen dat een bewijs $P(n)$ voor elke n geldig is

Opbouw inductiebewijs

- Basisstap / Inductiebasis
 - Aantonen dat $P(n)$ waar is voor n_0
- Aantonen dat als $P(n)$ geldig is, het ook geldig is voor $P(n+1)$
 - Gebruik makend van de inductiehypothese

4.9 Redeneren met Ontkenning

Een bewering is steeds waar of onwaar!

Let op met de niveaus van zekerheid!

4.10 Wanneer Welke methode gebruiken?

Er bestaat een x

- Constructie $\rightarrow$ 1 Geval geven

Er bestaat geen x ...

- Bewijs uit ongerijmde --> "Er bestaat wel een x waarvoor geldt..." moet tot ongerijmde leiden

Voor alle x

- Ongerijmde
- Bewijs door inductie

Eigenschappen

- Via definitie

4.11 Correctheidsbewijzen van algoritmen

Algoritme bewijzen

- Correctheid bewijzen
- Eindigheid bewijzen

Correctheid bewijzen

- Invarianten: eigenschappen die steeds op een bepaalde plaats gelden
- Hulpstellingen gebruiken

ZIE OEFENINGEN EN VOORBEELDEN!

Nagekeken en vervolledigd op 22-11-2022

5. Relaties

5.1 Koppels

Koppel = Samenvoegsel van twee objecten

- Volgorde belangrijk
- Twee elementen kunnen dezelfde zijn
- Twee koppels zijn gelijk als en slecht als hun componenten paarsgewijs gelijk zijn
- Kan bestaan uit getallen, verzamelingen, ...

Tupel = Algemeen samenvoegen van twee of meer objecten

- Koppel = 2-tupel, tupel met twee componenten
- Zelfde als struct/record in programmeertalen

5.2 Cartesisch Product

Cartesisch Product

- Product van meerdere verzamelingen
- $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$
 - o Niet commutatief!
- Product van meerdere verzamelingen?

Definitie: Het *Cartesisch product* van n verzamelingen $A_1, A_2, \dots, A_n$ is

$$\prod_{i=1}^n A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid \forall i : a_i \in A_i\}$$

5.3 Relaties

5.3.1 Relaties

Relatie = Beschrijving van verband

Relatie tussen A en B is een deelverzameling van A en B

- Verzameling van tupels

Bij meerdere verzamelingen: relatie van verzamelingen is deelverzameling van cartesisch product van die verzamelingen

- n-aire relatie voor n verzamelingen
 - o $n=2$ --> Binaire relatie
 - o $n=3$ --> Ternaire relatie
 - o $n=4$ --> Quartaire relatie

De relatie R met (x, y) als element wordt meestal geschreven als $R(x, y)$

5.3.2 Grafische voorstelling

- Pijltjes trekken van relaties
- We schrijven A en B apart --> Geen venndiagram met doorsnede! (zie voorbeelden)

5.4 Inverse Relatie

$$R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$$

Inverse van $\leq$ is $\geq$. Je moet de dingen omkeren, niet perse alles wat er niet in ligt.

Inverse van 'is ouder van' is 'is kind van'.

Inverse hebben dezelfde koppels, enkel omgekeerd!

5.5 Samenstelling

Meerdere binaire relaties samenvoegen.

Samenstelling van 'is ouder van' met zichzelf = 'is grootouder van'

Definitie: de samenstelling van de binaire relaties R en S , genoteerd $S \circ R$

$$S \circ R = \{(x, y) \mid \exists z : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S\}$$

5.6 Toepassing: Relationele Databanken

Relationele databases: opgebouwd uit vele relaties tussen objecten en componenten

6. Functies

6.1 Functies

Functies = Soorten van binaire relaties

- Binaire Relatie is een functie als $\forall x, y, z : (x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \Rightarrow y = z$

Voor elke x is er maar max één y!

Notatie: we gebruiken gewoonlijk de letters $f, g, \dots$ voor relaties die functies zijn. We schrijven $f(x) = y$ in plaats van $(x, y) \in f$. Als er voor een bepaalde x geen y bestaat met $(x, y) \in f$, noemen we $f(x)$ *ongedefinieerd*. We schrijven $f : A \rightarrow B$ om aan te geven dat f een functie van A naar B is. We schrijven $f : A \rightarrow B : x \mapsto E$ om aan te geven dat f een functie van A naar B is die x afbeeldt op E , met E een uitdrukking.

Voorbeeld: $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto 2x$ is de functie die natuurlijke getallen op hun dubbel afbeeldt. Er geldt dus bv. $f(3) = 6$.

- Bereik: $\text{Ber}(f) = \{y \in B \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$
- Domein: $\text{Dom}(f) = \{x \in A \mid \exists y \in B : f(x) = y\}$

In cursus:

Definitie 6.1. Een relatie $R \subseteq A \times B$ is een functie van A naar B als en slechts als voor elke $x \in A$ hoogstens één $(x, y) \in R$ bestaat. y wordt het beeld van x onder de functie genoemd.

A wordt de bronverzameling (soms domein) genoemd en B de doelverzameling (soms co-domein) van de functie.

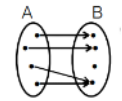
$$\forall x \in A : (x, y) \in R \wedge (x, y') \in R \Rightarrow y = y'$$

6.2 Afbeelding en Bijjectie

Functie $f: A \rightarrow B$ is **Afbeelding** als

- $f(x)$ gedefinieerd is voor elke x in A
- Uit elk punt van A een pijl vertrekt
- $\forall a \in A, \exists! b \in B : f(a) = b$

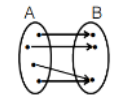
Afbeelding



Functie $f: A \rightarrow B$ is **Surjectie** als

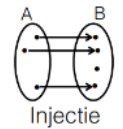
- Elk punt y in B het beeld is van een x in A
- Aan elk punt in B een pijl toekomt
- Elke y in B minstens 1 keer beeld
- $\forall b \in B, \exists a \in A : f(a) = b$

Surjectie



Functie $f: A \rightarrow B$ is **Injectie** als

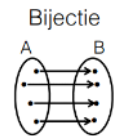
- Elke x in A heeft een uniek beeld y in B
- Van elk punt in A een andere pijl gaat naar één uniek punt in B
- Elke y in B hoogstens één keer beeld
- $\forall a, a' \in A : a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$



Injectie

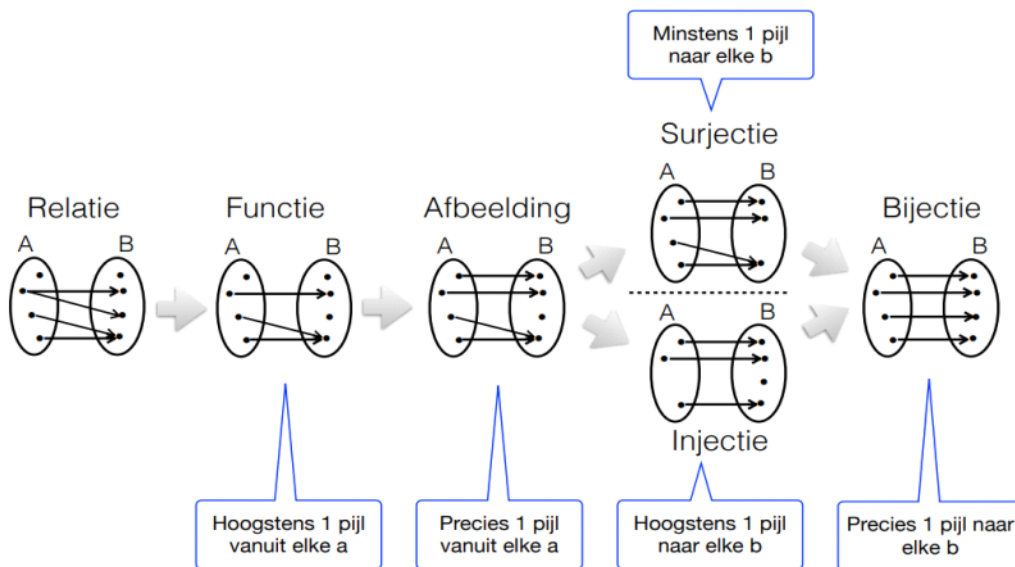
Functie $f: A \rightarrow B$ is **Bijjectie** als

- Elk punt in B heeft precies 1 pijl
- $\forall b \in B, \exists! a \in A : f(a) = b$



Bijjectie

Overzicht



Inverse Functie

Elke functie is relatie, inverse relatie bestaat steeds
De inverse van een functie is niet altijd een functie!

Functie $f: A \rightarrow B$ inverteerbaar = De inverse functie van f bestaat en is een functie

f is inverteerbaar als en slechts als $\forall a, a' \in A : a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$
 $\Rightarrow$ Afbeelding is inverteerbaar als het een injectie is

6.5 Functie toegepast op een verzameling

Voorbeeld: zij $f(x) = x^2$. Dan is $f(\{3,5\}) = \{9,25\}$, en $f(\{1, -1, 2\}) = \{1,4\}$.

Invers beeld onder een functie

Analoog kunnen we voor elke functie $f : A \rightarrow B$ een functie $f^{-1} : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ definiëren:

$f^{-1}(Y) = \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$. $f^{-1}(Y)$ wordt het *invers beeld* van Y onder f genoemd.

Merk op: deze f^{-1} bestaat steeds, zelfs als f (op elementniveau) niet inverteerbaar is !

Voorbeeld: zij $f(x) = x^2$. Dan is $f^{-1}(\{9\}) = \{3, -3\}$.

6.4 Operatoren op functies

Functies kunnen net als binaire relaties samengesteld worden.

Als relaties $R : A \rightarrow B$ en $S : B \rightarrow C$ functies zijn, dan is $S \circ R : A \rightarrow C$ ook een functie.

- $h = g \circ f \Leftrightarrow h(x) = g(f(x))$
- $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$, met $f^0(x) = x$

Voorbeeld: zij $f(x) = x + 1$ en $g(x) = 2x$. Dan is $g \circ f$ de functie die x afbeeldt op $2(x + 1)$. **Vraag:** wat is $f \circ g$ hier?

$$(f \circ g)(x) = 2x + 1$$

6.3 Functies met meerdere argumenten

Ook n-aire functie bestaat, dit is steeds een n+1-aire relatie!

Voorbeeld: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ is een binaire functie van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}$. De overeenkomstige ternaire relatie bevat alle tupels van de vorm $(x, y, \sqrt{x^2 + y^2})$.

Nagekeken en vervolledigd op 23-11-2022

7. Equivalentierelaties en Orderelaties

7.1 Binaire Relaties over Zelfde Verzamelingen

Eigenschappen van Relaties

- Reflexief $\rightarrow$ Elk punt moet een lus zijn naar zichzelf
 - o $\forall x \in A: (x,x) \in R$
 - o Voorbeeld: 'Is gelijk aan', want elk element is gelijk aan zichzelf
- Symmetrisch $\rightarrow$ als (x,y) , dan ook (y,x)
 - o $\forall (x,y) \in R: (y,x) \in R$
 - o Voorbeeld: Woorden met zelfde aantal letters
- Antisymmetrisch $\rightarrow$ als (x,y) , dan niet (y,x)
 - o $\forall (x,y) \in R: (y,x) \in R \Rightarrow x=y$
 - o Groter dan, ...
- Transitief $\rightarrow$ als (x,y) en (y,z) , dan (x,z)
 - o $\forall x,y,z \in A: (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$
 - o Voorbeeld: kleiner dan, groter dan, ...

7.2 Equivalentierelaties

Equivalentierelatie = Relatie die reflexief, symmetrisch en transitief is (symbool $\sim$)

Equivalentieklasse van A

- Groep van equivalente elementen met A
- Punten die onderling verbonden zijn met elkaar
- Mag niet leeg zijn
- Niets binnen de klasse mag equivalent zijn met iets buiten de equivalentieklasse

Quotiëntverzameling

- Verzameling van alle equivalentieklassen
- De quotiëntverzameling van A, genoteerd $A/\sim$, is de verzameling van alle equivalentieklassen van A onder $\sim$

Partitie

- Partitie van A is de verzameling niet-lege deelverzamelingen van A waarbij de Unie van deze verzamelingen A zelf is, en de doorsnede leeg is
 - o Elk element uit A zit dus in maar één deelverzameling van de partitie
 - o Er zijn geen dubbele elementen
- Bij equivalentierelatie $\Rightarrow$ Partitie is de quotiëntverzameling
 - o Geen enkele equivalentieklasse is leeg
 - o Alle elementen zitten in een equivalentieklasse
 - o De equivalentieklassen kunnen niet overlappen (bewijs ongerijmde)
- Elke Partitie definieert een Equivalentierelatie
 - o Bewijs door eigenschappen equivalentierelaties

Hoe bewijzen dat iets een partitie is?

1. Kijken naar bewijs van partitie

- Partitie mag geen lege verzameling bevatten
- Unie moet de verzameling zelf zijn
- Deelverzamelingen mogen niet overlappen

7.3 Orderrelaties

Orderrelatie = Relatie die reflexief, antisymmetrisch en transitief is (symbool $\leq$)

Totale Orde

- $\forall x, y \in A: x \leq y \vee y \leq x$
- Nooit zowel x, y als y, x (niet symmetrisch)
- Voor alle elementen geldt de relatie

Partiele Orde

- Alle Orderrelaties buiten de Totale Orde
- Niet voor alle elementen geldt de relatie
- Voorbeeld: 'Deelverzameling van'

Boven- en Ondergrenzen

- b is bovengrens voor $X \subseteq A \iff \forall x \in X: x \leq b$
- o is ondergrens voor $X \subseteq A \iff \forall x \in X: o \leq x$
- Supremum $\rightarrow$ Kleinste Bovengrens
- Infimum $\rightarrow$ Grootste Ondergrens

Waarom zijn supremum en infimum uniek?

Voor supremum:

Als a en b supremum zijn, dan $a \leq b$ en $b \leq a$. De orderrelatie is antisymmetrisch, dus zal b gelijk moeten zijn aan a .

Voor infimum:

Als a en b infimum zijn, dan $b \leq a$ en $a \leq b$. De orderrelatie is antisymmetrisch, dus zal a gelijk moeten zijn aan b .

Tralie

$A, \leq$ is een complete tralie $\iff$ elke eindige $X \subseteq A$ heeft een infimum en supremum in A

- Vaak voorgesteld door een visuele constructie = Hasse-Diagram

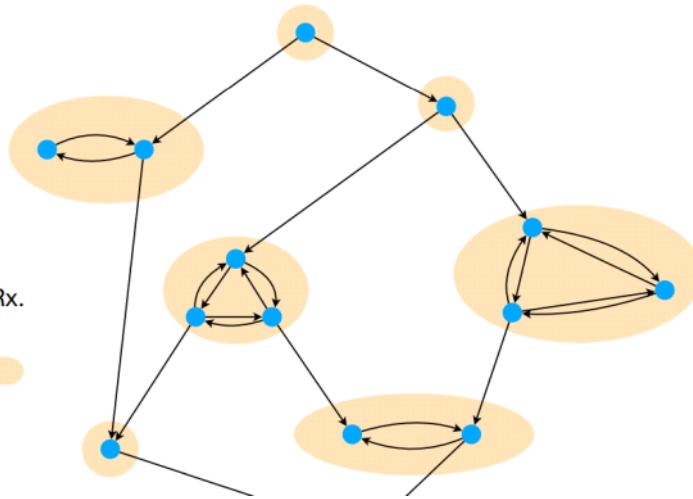
Quasi-Orde = Relatie die Reflexief en Transitief is

Is zelf niet altijd een orderrelatie!!!

- Speciale gevallen
 - o Equivalentierelaties $\rightarrow$ Ook symmetrie
 - o Orderrelaties $\rightarrow$ Ook antisymmetrie
- Voor Quasi-Orde zou je equivalentierelaties en klassen kunnen bedenken.

(oranje = equivalentieklassen)

Zij R een quasi-orde over A .
 Beschouw $\sim: x \sim y \Leftrightarrow xRy \wedge yRx$.
 $\sim$ is een equivalentierelatie.
 Equivalentieklassen voor $\sim$: 



Nagekeken en vervolledigd op 19/12/2022

8. Kardinaalgetallen

8.1 Kardinaliteit van een verzameling

Kardinaliteit van verzameling = Aantal elementen dat de verzameling bevat

- Genoteerd als
 - $|A|$
 - $\# A$
- Geeft een antwoord op de vraag "Hoeveel elementen bevat een verzameling?"

Wat is een getal?

- Natuurlijke, Gehele,
- Mogelijke interpretatie: getal is aantal elementen in verzameling == KARDINAAL GETAL
- Is kardinaalgetal steeds natuurlijk getal?
 - NEEN
 - Vb: de oneindige verzamelingen

Voorstelling oneindigheid in kardinaalgetallen

- Alef-nul ($\aleph_0$)
- Definitie: $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$
 - Het aantal elementen van de verzameling van natuurlijke getallen

Orde op kardinaalgetallen?

- $\leq$
 - $|A| \leq |B|$ asa er bestaat een injectie van A naar B
 - B bevat genoeg elementen om aan elke element van A een apart element van B te koppelen
- $=$
 - $|A| = |B|$ asa er bestaat een bijectie tussen A en B
 - We kunnen elementen van A 1-op-1 koppelen aan die van B zonder overschot in A of B
- Definiëren via injectie/bijectie

Afspraak: Indien er een bijectie bestaat zijn de kardinaliteiten gelijk

Zijn er evenveel even getallen als er getallen zijn?

- Zowel bijectie als injecties mogelijk
- Afspraak = Evenveel even getallen als natuurlijke getallen
 - Elk getal heeft een dubbel (zie ppt)

Hilbert Hotel

- Voorbeeld

$\leq$ is een orde?

- Bewijs in ppt
 - Bewijzen dat $\leq$ een orderrelatie is
 - Reflexief $\rightarrow$ Elk getal gelijk of kleiner dan zichzelf: $|A| = |B| \Rightarrow |A| \leq |B|$
 - Als er een Bijectie bestaat (=) bestaat er ook een injectie ($\leq$)

- Transitief $\rightarrow$ Als $|A| \leq |B|$ en $|B| \leq |C|$, dan $|A| \leq |C|$
 - Als $A \rightarrow B$ en $B \rightarrow C$ injecties zijn, dan $A \rightarrow C$ ook injectie ($\leq$)
- Antisymmetrisch $\rightarrow$ Stelling Cantor-Bernstein-Schröder

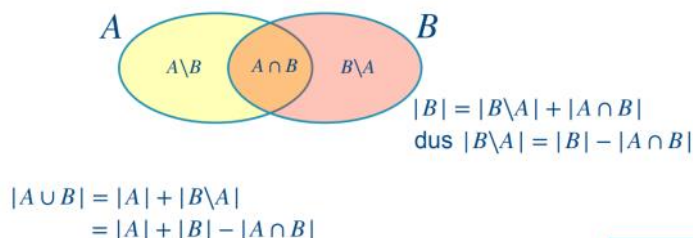
Cantor-Bernstein-Schröder (bewijs begrijpen, niet kennen of zelf kunnen geven)

- Te Bewijzen= $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$
- Vertaling door definities: Als injectie $A \rightarrow B$ en injectie $B \rightarrow A$ moet er bijectie $A \rightarrow B$
 - Voor eindige verzamelingen is dit duidelijk en makkelijk
 - Voor oneindige verzamelingen moeilijker aan te tonen
 - Denk aan Hilbert, er is een lijst met voor elke toerist een kamer, en een andere lijst voor elke kamer een toerist. (2 injecties)

8.2 Telproblemen

Stellingen Telproblemen

- Als A en B disjunct zijn (niet overlappen) geldt: $|A \cup B| = |A| + |B|$
 - Dit volgt uit de definitie van +
- Indien niet perse disjunct, geldt: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
 - Bewijs door vorige stelling en opdeling in disjuncte delen
 - Bewijs: we delen $A \cup B$ op in disjuncte delen en gebruiken dan de vorige stelling.



- Voor 3 verzamelingen geldt: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
 - Bewijs door vorige stellingen en venndiagram te tekenen!
- Voor n verzamelingen geldt: **Inclusie-Exclusie Principe**
 - Alle doorsnedes van oneven aantal verzamelingen: positief meetellen
 - $|A|$, $|A \cap B \cap C|$,
 - Alle doorsnedes van even aantal verzamelingen: negatief aftrekken
 - $- |A \cap B|$, $- |A \cap B \cap C \cap D|$,
 - Algemene formule

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{S \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|S|+1} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right|$$

- Cartesisch Product: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
 - Bewijs door alle koppels op te sommen in n rijen $|A|$ en m kolommen $|B|$, er zijn dan $m \cdot n$ koppels

- Algemeen Cartesisch Product
 - o Algemene Formule

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = \prod_{i=1}^k |A_i|$$

- o Gevolg: $|A^n| = |A|^n$

- Kardinaliteit Machtsverzameling $|P(A)| = 2^{|A|}$

- o Bewijzen kan door

- Inductie

- **Stelling:** $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

- **Bewijs:** per inductie op $|A|$.

Basis: $|A| = 0$: dan is $A = \emptyset$. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, dus $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 1$. Verder geldt $|\emptyset| = 0$, dus $2^{|\emptyset|} = 2^0 = 1$. We vinden dat $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 2^{|\emptyset|}$, dus de inductiebasis is voldaan.

Inductiestap: De inductiehypothese is dat $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ voor alle A met $|A| = n$. We moeten bewijzen dat dan $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ voor alle A met $|A| = n + 1$. Beschouw een willekeurige $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$. De deelverzamelingen van A zijn onder te verdelen in zij die a_{n+1} niet bevatten, en zij die a_{n+1} wel bevatten. De eerste soort zijn precies de deelverzamelingen van $\{a_1, \dots, a_n\}$ en daarvan zijn er 2^n (inductiehypothese). Van de tweede soort zijn er precies evenveel, want met elke $X \subseteq \{a_1, \dots, a_n\}$ komt precies één verzameling $X \cup \{a_{n+1}\}$ overeen, en vice versa. Samengeteld zijn er dus $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ deelverzamelingen van A .

- Bijjectie vinden tussen $P(A)$ en andere verzameling waarvan je de Kardinaliteit wel kan vinden

- **Stelling:** $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

- **Bewijs:** Zij $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Beschouw $f: \mathcal{P}(A) \rightarrow \{0,1\}^n : X \mapsto (v_1, v_2, \dots, v_n)$ met $v_i = 1 \Leftrightarrow a_i \in X$. Het is duidelijk dat f een bijjectie is: met elke $X \subseteq A$ komt precies één tupel overeen, en vice versa. Dus $|\mathcal{P}(A)| = |\{0,1\}^n| = 2^n$.

Illustratie, voor $A = \{a_1, a_2, a_3\}$:

$\emptyset$		(0,0,0)
$\{a_1\}$		(1,0,0)
$\{a_2\}$		(0,1,0)
$\{a_3\}$		(0,0,1)
$\{a_1, a_2\}$		(1,1,0)
$\{a_1, a_3\}$		(1,0,1)
$\{a_2, a_3\}$		(0,1,1)
$\{a_1, a_2, a_3\}$		(1,1,1)

LEGE VERZAMELING HEEFT 1 DEELVERZAMELING = ZICHZELF!!!

- Hoeveel afbeeldingen mogelijk van A naar B ? $|B^A| = |B|^{|A|}$
 - o Komt overeen met ??

- Bewijs

Stelling: $|B^A| = |B|^{|A|}$

Bewijs: Een afbeelding f van $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ naar B kent aan elke $a_i \in A$ een element van B toe. We kunnen elke afbeelding dus ondubbelzinnig voorstellen als een tuple $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ met $v_i = f(a_i)$, en omgekeerd definieert elk dergelijk tuple één afbeelding. Met andere woorden, er is een bijectie tussen B^A en de verzameling van alle dergelijke tuples, B^n . De kardinaliteit van die verzameling is $|B|^n = |B|^{|A|}$.

- Hoeveel injecties mogelijk van A naar B? (*Kardinaliteit kleiner of gelijk*)
 - Komt overeen met VARIATIE
 - Volgorde Belangrijk!
 - Bewijs

Notatie: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ ("n faculteit"), waarbij we afspreken dat $0! = 1$

Merk op: $n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Stelling: als $|A| \leq |B|$, is het aantal injecties van A naar B gelijk aan $\frac{|B|!}{(|B|-|A|)!}$

Bewijs: Er is een bijectie tussen injecties van A naar B enerzijds, en tuples $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ met $v_i \in B$ en alle v_i verschillend. Voor v_1 zijn er $|B|$ keuzes mogelijk (elk element van B mag gekozen worden), voor v_2 vervolgens nog $|B| - 1$ keuzes (elk element kan gekozen worden, behalve v_1), voor v_3 $|B| - 2$ keuzes, etc., tot we voor v_n nog $|B| - (n-1)$ keuzes hebben. In totaal geeft dat $|B|(|B|-1)(|B|-2)\dots(|B|-n+1) = \frac{|B|!}{(|B|-|A|)!}$ combinaties.

- Hoeveel bijecties mogelijk van A naar B? (*Kardinaliteit gelijk*)
 - Komt overeen met PERMUTATIE
 - Bewijs

- **Stelling:** als $|A| = |B|$, is het aantal bijecties van A naar B gelijk aan $|A|!$ (en anders is het 0)

- **Bewijs:**

- Als $|A| \neq |B|$, bestaat er bij definitie geen bijectie tussen A en B
- Als $|A| = |B|$, is een injectie automatisch een bijectie (want elke $a \in A$ moet op een verschillende $b \in B$ afgebeeld worden). We kunnen dus gewoon injecties tellen: daarvan zijn er

$$\frac{|B|!}{(|B|-|A|)!} = \frac{|B|!}{0!} = |B|! = |A|!$$

- Aantal Permutaties van A? (*Bijectie met zichzelf*)
 - Komt overeen met PERMUTATIE
 - Bewijs

- Permutatie van A = bijectie van A naar A
- Er zijn dus $|A|!$ permutaties

- **Stelling:** Het aantal volgordes waarin de elementen van A geschreven kunnen

- Permutatie van A = bijectie van A naar A
 - Er zijn dus $|A|!$ permutaties
 - **Stelling:** Het aantal volgordes waarin de elementen van A geschreven kunnen worden = het aantal permutaties van A
 - **Bewijs:** Een volgorde is een bijectie tussen A en $\{1, 2, \dots, |A|\}$ (de bijectie geeft de positie van elke $a \in A$ in de opvolging aan). Er zijn $|A|!$ dergelijke bijecties.
- Aantal combinaties van k elementen uit A ?
- Komt overeen met COMBINATIE
 - Volgorde niet belangrijk!
 - Bewijs
- Zij A een verzameling met n elementen : hoeveel verschillende deelverzamelingen van precies k elementen heeft A dan?
 - Bv. $\{a, b, c, d\}$ heeft 6 deelverzamelingen van 2 elementen: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$
 - **Stelling:** Een verzameling met n elementen heeft precies $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ deelverzamelingen van k elementen, voor $k \leq n$.
 - **Bewijs:** het aantal tupels van de vorm $(v_1, \dots, v_k)$ met $v_i \in A$ en alle v_i verschillend, is $\frac{n!}{(n-k)!}$ (zagen we eerder, bij injecties). Met elke verzameling van k elementen komen precies $k!$ dergelijke tupels overeen (namelijk, voor elke volgorde waarin je de elementen kan schrijven, een apart tupel). Het aantal verzamelingen is dus $k!$ keer kleiner dan het aantal tupels, m.a.w., $\frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Wiskunde Herhaling

- Combinatie
 - Geen volgorde
 - Aantal elementen uit een groep
 - Deelverzamelingen
- Variatie
 - Wel volgorde
 - Selectie van elementen uit groep
 - Deelverzamelingen op alle mogelijke volgordes
- Permutatie
 - Wel volgorde
 - Selectie van alle elementen in een groep
 - Verzameling op alle mogelijke volgordes

8.3 Kardinaliteit van Oneindige Verzamelingen

Natuurlijke Getallen $\mathbb{N}$

- Zoals eerder gezien is $|\mathbb{N}| = \aleph_0$

Gehele Getallen $\mathbb{Z}$

- Is er een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$? Dan weten we dat de kardinaliteiten gelijk zijn aan $\aleph_0$

Rationale Getallen $\mathbb{Q}$

- Is er een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}$?
 - o Gelijkaardig aan Hilbert Hotel

Reële Getallen

- Er is geen bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$!
- Bewijs
 - o Bewijs uit het ongerijmde

Stel dat je alle getallen in het oneindige lange rij kan opsommen, dan kunnen we altijd een getal vinden dat niet gelijk is aan eender welk getal in die rij (contradictie)

De aanname dat we alle reële getallen kunnen opsommen leidt tot een contradictie

- o Besluit: Aantal reële getallen is strikt groter dan de Kardinaliteit van natuurlijke getallen!

Algemeen

- Verzameling met Kardinaliteit $\leq \aleph_0$ = AFTELBAAR
- Verzameling met Kardinaliteit $> \aleph_0$ = ONAFTELBAAR / OVERAFTELBAAR

Nagekeken en vervolledigd op 22/12/2022