

Bewijzen en redeneren voor informatici definities

Hoofdstuk 1

- doorsnede: De verzameling die alle elementen bevat die zowel in A als in B zitten, en geen andere.
 $\{x \mid x \in A \text{ en } x \in B\}$
- unie: De verzameling die alle elementen van A bevat, alle elementen van B, en geen andere.
 $\{x \mid x \in A \text{ of } x \in B\}$
- verschil: De verzameling van alle elementen van A die niet in B voorkomen.
 $\{x \mid x \in A \text{ en } x \notin B\}$
- symmetrisch verschil: De verzameling van alle elementen die in de ene zitten, maar niet in de andere.
 $\{x \mid (x \in A \text{ en } x \notin B) \text{ of } (x \notin A \text{ en } x \in B)\}$
- complement: De verzameling van alle individuen die geen element zijn van A.
 $\{x \mid x \notin A\}$
- machtsverzameling: De verzameling van alle deelverzamelingen van A.
 $\{A' \mid A' \subseteq A\}$

Hoofdstuk 2

- sommige elementen: $\exists x \in S: P$
- juist één element: $\exists! x \in S: P$
- geen enkel element: $\nexists x \in S: P$ of $\neg \exists x \in S: P$ of $\forall x \in S: \neg P$

Hoofdstuk 3

- vermoeden: ~~Het is~~ Een stelling die waarschijnlijk waar is, zonder ze te kunnen bewijzen
- lemma: Een hulpstelling
- gevolg: Een stelling wiens bewijs triviaal is.

Hoofdstuk 4

- probleem: Een precieze omschrijving van een algemene taak.
- instantie v/e probleem: De combinatie van een probleem met een specifieke invoer en uitvoer.
- tijdscomplexiteit v/e algoritme: Het aantal basisoperaties dat het algoritme uitvoert om de oplossing te bekomen.
- tijdscomplexiteit v/e probleem: De kleinste mogelijke tijdscomplexiteit v/e algoritme die dat probleem oplost, voor die probleemgrootte.
- bewijs via:
 - substitutie
 - herhaalde gevolgtrekking
 - wederzijdse implicatie
 - constructie
 - gevals onderscheid
 - contradictie (uit het ongerijnde) (dankzij matius tollons)
 - inductie
 - redeneren met ontkenningen
 - vaststelling
 - tekening
- invariant: Een bewering die we met een bepaald punt in een algoritme associëren, en waarvan we kunnen aantonen dat die altijd waar is, op dat punt.

Hoofdstuk 5

- Cartesisch product:
van 2 verzam.

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \}$$

- Cartesisch product:
van n verzam. A_i

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i$$

•

$$A^1 = A \quad \text{en} \quad \forall n > 1: A^n = A^{n-1} \times A$$

- relatie:

Een deelverzameling van $A \times B$

- relatie over
 $A_1, A_2, \dots, A_n$

Een deelverzameling van $\prod_{i=1}^n A_i$

- inverse relatie:
van R

$$R^{-1} = \{ (x, y) \mid (y, x) \in R \}$$

- samenstelling:

$$S \circ R = \{ (x, y) \mid \exists z \in B: (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S \}$$

•

$$R^1 = R \quad \text{en} \quad \forall n > 1: R^n = R \circ R^{n-1}$$

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$$

Hoofdstuk 6

- functie:
van A naar B

Een relatie $R \subseteq A \times B$ is een functie van A naar B as en
voor elke $x \in A$ hoogstens één $(x, y) \in R$ bestaat.

$$f: A \rightarrow B$$

$$\forall x \in A: (x, y) \in R \wedge (x, y') \in R \Rightarrow y = y'$$

- domein:
 $\forall f: A \rightarrow B$

$$\{ x \mid \exists y: (x, y) \in f \}$$

- bereik:
 $\forall f: A \rightarrow B$

$$\{ y \mid \exists x: (x, y) \in f \}$$

- afbeelding:

Een functie $f: A \rightarrow B$ is een afbeelding van A naar B as en
voor elke $x \in A$ precies één $(x, y) \in f$ bestaat.

~~$$\forall x \in A: \exists y: (x, y) \in f$$~~

- surjectie:

Een afbeelding $f: A \rightarrow B$ is een surjectie as en
elke $y \in B$ het beeld is van een $x \in A$.

$$\forall y \in B: \exists x \in A: (x, y) \in f$$

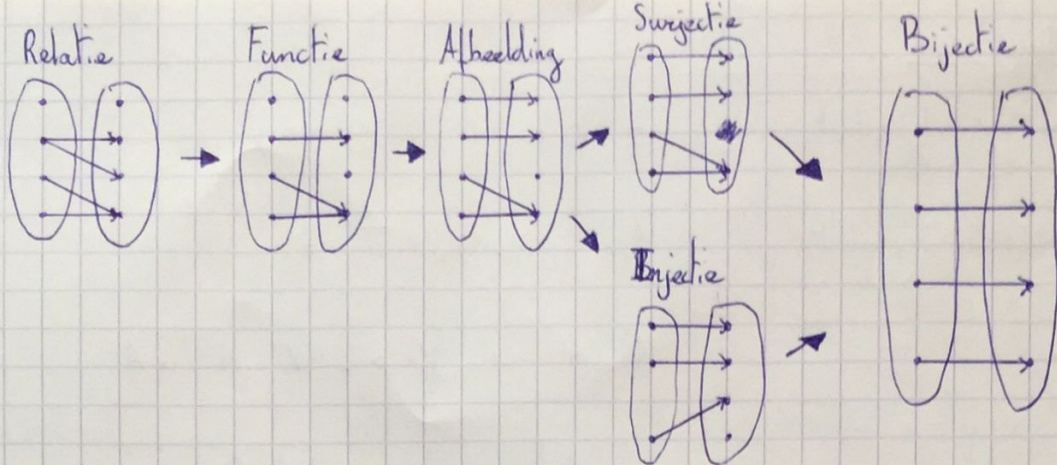
- injectie

Een afbeelding $f: A \rightarrow B$ is een injectie as en
elke $x \in A$ op een verschillende $y \in B$ afgebeeld wordt.

$$x \neq x' \Leftrightarrow f(x) \neq f(x')$$

- bijectie

Een afbeelding $f: A \rightarrow B$ is een bijectie as en
injectie + surjectie



• transformatie:

Een functie $f: A \rightarrow A$ is een transformatie a.s.a. elke $x \in A$ een beeld heeft onder f .

• permutatie:

Een functie $f: A \rightarrow A$ is een permutatie a.s.a. elke $x \in A$ een beeld heeft onder f en precies één keer het beeld is v.l.e. x onder f .

• samenstelling:
v.l.e. f en g
 $A \times B \rightarrow B \times C$

... is de functie $h: A \rightarrow C: x \mapsto g(f(x))$.

• inverse functie:

~~$f: A \rightarrow B$~~ $f: A \rightarrow B: \forall x \in A: f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

$f^{-1}: B \rightarrow A: f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

• identiteitsfunctie:

$i_A: A \rightarrow A: x \mapsto x$

Hoofdstuk 7

• reflexief:
 $R \subseteq A \times A$

$\forall x \in A: (x, x) \in R$

• anti-reflexief:
 $R \subseteq A \times A$

$\forall x \in A: (x, x) \notin R$

• symmetrisch:
 $R \subseteq A \times A$

$\forall x, y \in A: (x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R$

• anti-symmetrisch:
 $R \subseteq A \times A$

$\forall x, y \in A: (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$

• transitief:
 $R \subseteq A \times A$

$\forall x, y, z \in A: (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$

• equivalentierelatie:

Een relatie die reflexief, symmetrisch en transitief is. ($\sim$)

• equivalentieklasse:

De verzameling van alle elementen van A die equivalent zijn met x .

$K(x) = \{y \in A \mid x \sim y\}$

- partitie:

$P = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ is een partitie van A als

1. $\forall x \in A: \exists! P_i \in P: x \in P_i$
2. $\forall P_i \in P: P_i \neq \emptyset$

- quotiëntverzameling:
van A onder $\sim$

De partitie van A die bestaat uit alle equivalentieklassen van A onder $\sim$
 $A/\sim$

- orde relatie:

Een relatie die reflexief, antisymmetrisch en transitief is.

- totale orde:

Een orde relatie waarvoor geldt dat: $\forall x, y: x \leq y \vee y \leq x$

- partiële orde:

Een niet totale orde relatie.

- geordende verzameling:

Een verzameling A waarover een orde relatie $\leq$ gedefinieerd is.

$$A, \leq$$

- bovengrens:

$(X \subseteq A, \leq)$ $a \in A$ is een bovengrens voor X als
 $\forall x \in X: x \leq a$

- ondergrens:

$(X \subseteq A, \leq)$ $a \in A$ is een ondergrens voor X als
 $\forall x \in X: a \leq x$

- supremum:
van X

$(b \in A, \leq)$ b is een bovengrens voor X en $b \leq b'$ (b' : andere bovengrens)
= kleinste bovengrens

- infimum:
van X

$(o \in A, \leq)$ o is een ondergrens voor X en $o' \leq o$ (o' : andere ondergrens)
= grootste ondergrens

- complete tralie:

Een ~~geordende~~ geordende verzameling $A, \leq$ met de eigenschap dat elke $X \subseteq A$ een supremum en infimum in A heeft.

Hoofdstuk 8

- kardinaliteit
v/e verzameling

Het aantal elementen dat de verzameling bevat

$$|S| \text{ of } \#S$$

-

$|A| \leq |B|$ als er een injectie van A naar B bestaat

$|A| = |B|$ als er een bijectie van A naar B bestaat

-

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

- inclusie-exclusie-principe:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}, |I| \text{ oneven}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| - \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}, |I| \text{ even}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

-

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

$$|P(A)| = 2^{|A|}$$

- alle afbeeldingen van A naar B

$$B^A, |B^A| = |B|^{|A|}$$

- aantal injecties van A naar B

$$\frac{n!}{(n-m)!}$$

- aantal bijecties van A naar B

$$n!$$

- aantal combinaties van m el uit A

$$\frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}$$

- kardinaliteit van $\mathbb{N}$

$$\aleph_0$$

- kardinaliteit van $\mathbb{Z}$

$$\aleph_0$$

- kardinaliteit van $\mathbb{Q}$

$$\aleph_0$$

- kardinaliteit van $\mathbb{R}$

$$\neq \aleph_0 \quad (\text{onaftelbaar})$$

} aftelbaar oneindig

$$\forall n \in \mathbb{N} : n + \aleph_0 = \aleph_0 + n = \aleph_0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : n \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \cdot n = \aleph_0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \aleph_0^n = \aleph_0$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ met } n > 1 : n^{\aleph_0} > \aleph_0$$

$$\# \text{ deelverzamelingen van } \mathbb{N} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$$

$$\# \text{ functies van } \mathbb{N} \text{ naar } \mathbb{N} = \aleph_0^{\aleph_0} > \aleph_0$$