bnr

helene de witte

5 November 2019

1 vraag 1

De vraag luidt: Geef de ontkenning van de volgende bewering over een verzameling X.

$$\forall x \in X : \exists A \in P(X) : A \neq \emptyset \wedge [\forall B \in P(X) : B \subset A \Longrightarrow \neg(x \in B)] \qquad (1)$$

oplossing:
De ontkenning van (1) is, $\exists x \in X : \forall A \in P(X) : A = \emptyset \vee [\exists B \in P(X) : B \subset A \wedge (x \in B]$

2 vraag 2

De vraag luidt: Zij f:X $\to Y$een functie, $A \in P(X) en B \in P(Y)$.

(a)
Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de implicatie(f^-1(B)) $\subset A \Longrightarrow B \subset f(A)$niet altijd hoeft te gelden.

(b)
Bewijs dat
$\forall x \in X : B \in P(Y) : (f^-$1(B)) $\subset A \Longrightarrow B \subset f(A)$

Een oplossing van (a) is:

Neem f de functie $f : X \to Y.$Kies X = a,b. Kies A = b. Kies Y = 0,1 en kies B = 1. zodat f(a) = 0 en f(b) = 0. Dan is f$^-$1(B)$\subset$A waar want de lege verzameling is een deelverzameling van b. Maar B$\subset$f(A) is niet waar want 1$\subset$0 is niet juist! Dus is f$^-$1(B)$\subset$A $\Longrightarrow$ B$\subset$f(A) niet altijd waar want we vonden een tenenvoorbeeld voor deze uitspraak.
$Deoplossingvoor(b)is :$

We moeten 2 implicaties bewijzen:

De eerste implicatie is:A$\in$ P(X): B$\in$ P(Y): [$f^{-}1$(B) $\subset$A]$\Longrightarrow$B $\subset$f(A)$\Longrightarrow$f is surjectief.
De tweede implicatie is: f is surjectief$\Longrightarrow$ $\forall$A$\in$P(X) : $\forall$B$\in$ P(Y): $f^{-}1$(B)$\subset$A$\Longrightarrow$B$\subset$f(A).

De eerste implicatie is iets moeilijker om te bewijzen. HINT: het is moeilijk om surjectiviteit te bewijzen ga er van uit dat f injectief is en gebruik dan contrapositie. Deze is belangrijk om even zelf bij stil te staan.

$Ikbewijsnudetweedeimplicatie.\ Stelfissurectief.NeemA\in$P(X) willekeurig en neem B $\in$ P(Y) willekeurig. Neem $f^{-}1$(B)$\subset$A aan. Kies y $\in$B willekeurig dan is er een x $\in$X zodat f(x) = y, want f is sutjectief. We willen bewijzen dat y$\in$f(A). Dan is f(x) $\in$B. Wegens de definitie van het invers beeld is x $\in f^{-}1$(B). Omdat $f^{-}1$(B)$\subset$A aangenomen is, is x$\in$A. Omdat f(x) = y is y $\in$ f(A). Omdat y $\in$B willekeurig gekozen, is B $\subset$f(A). Omdat A $\in$P(X) willekeurig gekozen was en B $\in$P(Y) willekeurig gekozen was, is de tweede implicatie waar.
Omdat de eerste en tweede implicatie bewezen zijn geldt$\forall$A $\in$P(X):$\forall$B $\in$P(Y): $f^{-}1$(B)$\subset$A $\Longrightarrow$B $\subset$f(A) als en slechts als f is surjectief.
$QED.$

3 vraag 3

$Devraagluidt : GegevenzijntweeverzamelingenXenY.DeverzamelingFun(X,Y)bevatallefunctiesvanX$
asa er bijectieve functies $\sigma : X \to X$en $\tau : Y \to$Y bestaan woaarvoor geldt:

f o $\sigma = \tau$o g.Zie foto als bijlage want het is een lang bewijs, en ik ben een beetje lui. Morgen is het bvp.

Voor b geef ik een werkwijze mee, het is een mooie oefening om zelf in te zien. Je kan voor b bijvoorbeeld een beeld veranderen van f als je g definieert maar zorg er wel voor dat deze in dezelfde equivalentieklasse blijft. Dus zoek de equivalentieklassen en geef een functie g (hint: neem eenzelfde vorm) zodat deze niet veranderen maar er wel een beeld veraderd is. Door een beeld te veranderen is f niet gelijk aan g.