

Examen Analyse 2024

Neem $\epsilon > 0$ willekeurig

26 juni 2024

1 Vragen

Vraag 1

a) Zij $a < b \in \mathbb{R}$. Zij $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ een continue functie. Toon aan dat $\exists x \in [a, b] : f(x) = x$.

Geldt deze uitspraak nogsteeds voor de volgende gevallen? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld:

b) Als $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ niet continu?

c) Als $f : A \rightarrow A$ met $A =]0, 1[$ en f continu?

d) Als $f : A \rightarrow A$ met $A = [0, +\infty[$ en f continu?

Vraag 2

a) Zij $R \in \mathbb{R}_0^+$. Zij f een functie gedefinieerd op $] - R, R[$ die minstens $k \geq 1$ keer afleidbaar is. Stel dat er getallen $-R < a_1 < \dots < a_{k+1} < R$ zijn zodat $f(a_i) = 0$ voor alle $i \in \{1, \dots, k+1\}$. Toon aan dat er een $b \in]a_1, a_{k+1}[$ bestaat zodat $f^{(k)}(b) = 0$.

b) Zij f een machtreeks gedefinieerd door $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ met als convergentiestraal $R \in \mathbb{R}_0^+$ en stel dat er een rij $(a_n)_n$ in $] - R, R[\setminus \{0\}$ is waarvoor geldt dat $f(a_n) = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $a_n \rightarrow 0$. Toon aan dat $f = 0$.

Vraag 3

Zij $C([0, 1])$ de verzameling continue functies van $[0, 1]$ naar $\mathbb{R}$ uitgerust met de supremummetriek d_∞ . Zij $\rho_x : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \rho_x(f) = f(x)$ voor $x \in [0, 1]$. Zij $A \subset C([0, 1])$. Bewijs telkens volgende uitspraken, of geef een tegenvoorbeeld.

a) Stel dat A compact is. Dan is $\rho_x(A)$ compact voor alle $x \in [0, 1]$.

b) Stel dat A open is. Dan is $\rho_x(A)$ ook open voor alle $x \in [0, 1]$.

2 Oplossingen

Zoals gewoonlijk zijn dit de oplossingen van een student.

Vraag 1

a)

Bew: Neem aan dat $f(a) \neq a$ en $f(b) \neq b$, in deze gevallen is de uitspraak immers triviaal. Dus moet $f(a) > a$ en $f(b) < b$. Zij nu $g(x) = f(x) - x$. Dan is g continu, $g(a) = f(a) - a > 0$ en is $g(b) = f(b) - b < 0$. Door de tussenwaardestelling is er nu een $x \in]a, b[$ zodat $g(x) = 0$, dus is $f(x) = x$. $\square$

b) Deze uitspraak is niet waar. Zij $a = 0, b = 1$.

Zij $f : [a, b] \rightarrow [a, b] : x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{als } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 0 & \text{als } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

Dan is het meteen duidelijk dat f een tegenvoorbeeld is.

c) Gewoon x^2 op $]0, 1[$. Je kan ook nog wat andere random functies pakken die $y = x$ zouden snijden in 0 of 1, wees creatief.

d) De opletende student bemerkt dat $1 \neq 0$. Dus zal $f(x) = x + 1$ een tegenvoorbeeld zijn.

Vraag 2

a)

Bew: Het is duidelijk dat we dit zullen oplossen via inductie.

Basisgeval: $k = 1$. Als $k = 1$ hebben we $-R < a_1 < a_2 < R$ zodat $f(a_1) = f(a_2) = 0$. Gezien f afleidbaar is op $] - R, R[$ is f ook afleidbaar en continu op $[a_1, a_2]$. Nu gooien we hier Rolle op en hebben we een $b \in]a_1, a_2[$ zodat $f'(b) = 0$.

Inductiehypothese wordt gelaten als oefening voor de lezer.

Zij $k = n + 1$. We hebben nu een stijgende rij $(a_n)_{n \in \{1, \dots, n+2\}}$ zodat $f(a_i) = 0$ voor alle i . We gebruiken de inductiehypothese op $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$, wat ons een b_1 geeft zodat $f^{(n)}(b_1) = 0$. We kunnen analoog een $b_2 \in]a_2, \dots, a_{n+2}[$ vinden zodat $f^{(k)}(b_2) = 0$. We weten dat $b_1 \neq b_2$ want we nemen deze van verschillende kanten. ¹ Nu gebruiken we weer Rolle en zijn we klaar. $\square$

b)

Bew: Dit kan op veel manieren aangetoond worden. Mijn oplossing bestaat uit via inductie rijen $(a_n)_n$ te vinden voor elke $k \in \mathbb{N}$ zodat $a_n \rightarrow 0$ en $\forall n \in \mathbb{N} : f(a_n) = 0$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Aangezien dit een machtreeks is, is de k -de afgeleide steeds continu, dus is $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(k)}(a_n) = f^{(k)}(0)$ voor alle k . Aangezien $f^{(k)}(0) = k!c_k$ moet nu $c_k = 0$ voor alle k , dus zijn we klaar. $\square$

¹Ik weet dat dit niet rigoreus is, maar komaan, je weet wel hoe het werkt.

2.1 Vraag 3

a)

Bew: Neem aan dat A compact is. We tonen aan dat $\rho_x(A)$ rijcompact is voor alle $x \in [0, 1]$. Neem $x \in [0, 1]$ willekeurig. Zij $(a_n)_n$ een rij in $\rho_x(A)$. Er is dan een rij van functies $(f_n)_n$ zodat $f_n(x) = a_n$ voor alle n . Omdat A compact is heeft $(f_n)_n$ een convergente deelrij $(f_{n_k})_k$ met limiet $f \in A$. Dan is er voor elke $\epsilon > 0$ een $n_0 \in \mathbb{N}$ zodat voor $n \geq n_0$ en $x \in [0, 1]$ geldt dat $|f_{n_k}(x) - f(x)| < \epsilon$. Dus is $(a_{n_k})_k$ een convergente deelrij van $(a_n)_n$ met limiet $f(x) \in \rho_x(A)$. Omdat alles willekeurig genomen is enzo is de stelling nu bewezen :) . $\square$

b)

Bew: Neem aan dat A open is. Neem $a \in \rho_x(A)$ willekeurig. Er is dan een $f \in A$ zodat $f(x) = a$. Omdat A open is, is er een $\epsilon > 0$ zodat $B(f, \epsilon) \subset A$. We tonen aan dat $B(a, \epsilon) \subset \rho_x(A)$. Neem $b \in B(a, \epsilon)$ willekeurig. Zij $g = f - a + b$. Dan is $d_\infty(f, g) < \epsilon$, dus is $g \in A$. Nu is $g(x) = f(x) - a + b = b$. Dus is $b \in \rho_x(A)$. Dus zal ook $B(a, \epsilon) \subset \rho_x(A)$. Aangezien a willekeurig genomen was is dus $\rho_x(A)$ open. $\square$