Bewijzen en Redeneren voor Informatici

Reinoud Berkein

17 januari 2018

Samenvatting

Een korte samenvatting van definities uit de cursus.

Hoofdstuk 1

- Doorsnede: De verzamerling die alle elementen bevat die zowel in A als in B zitten, en geen andere.
  $\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- Unie: De verzameling die alle elementen van A bevat, alle elementen van B en geen andere.
  $\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- Verschil: De verzameling van alle elementem van A die niet in B voorkomen.
  $\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- Symetrisch verschil: De verzameling van alle ellementen die in de ene zitten, maar niet in de andere.
  $\{x \mid (x \notin A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \notin B)\}$
- Complement: De verzameling van alle individuen die geen ellement zijn van A.
  $\{x \mid x \notin A\}$
- Machtsverzameling: De verzameling van alle deelverzamelingen van A. $\{A' \mid A' \subseteq A\}$

Hoofdstuk 2

- Sommige ellementen: $\exists x \in S : P$
- Juist één ellement: $\exists ! x \in S : P$
- Geen enkel ellement: $\nexists x \in S : P$ of $\neg \exists x \in S : P$ of $\forall x \in S : \neg P$
- Modus ponens: Als P waar is, en $P \Rightarrow Q$ is waar dan is Q ook waar.
- Modus tollens: Als Q onwaar is, en $P \Rightarrow Q$ is waar dan is P ook onwaar.

Hoofdstuk 3

- Vermoeden: Een stelling die waarschijnlijk waar is, zonder ze te kunnen bewijzen
- Lemma: Een hulpstelling
- Gevolg: Een stelling wiens bewijs triviaal is.

Hoofdstuk 4

- Probleem: Een precieze omschrijving van een algemene taak.
- Instantie v/e probleem: De combinatie van een probleem met een specifieke invoer.
- Tijdscomplexiteit v/e algoritme: Het aantal basisoperaties dat het algoritme uitvoer om de oplossing te bekomen.
- Tijdscomplexiteit v/e probleem: De kleinst mogelijke tijdscomplexiteit van een algoritme die dat probleem oplost, voor die probleemgrootte.
- bewijs via:
  - subsitutie
  - herhaalde gevolg trekking
  - wederzijdse implicatie
  - constructie
  - gevalsonderscheid
  - contradictie (uit het ongerijmde, dankzij molus tollens)
  - inductie
  - redeneren met ontkenning
  - vaststelling
  - tekening
- Invariant: Eem bewering die we met een bepaald punt in een algoritme associëren en waarvan we kunnen aantonen dat die altijd waar is op dat punt.

Hoofdstuk 5

- Cartesisch product van 2 verz.: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$
- Cartesisch product van n verz.:

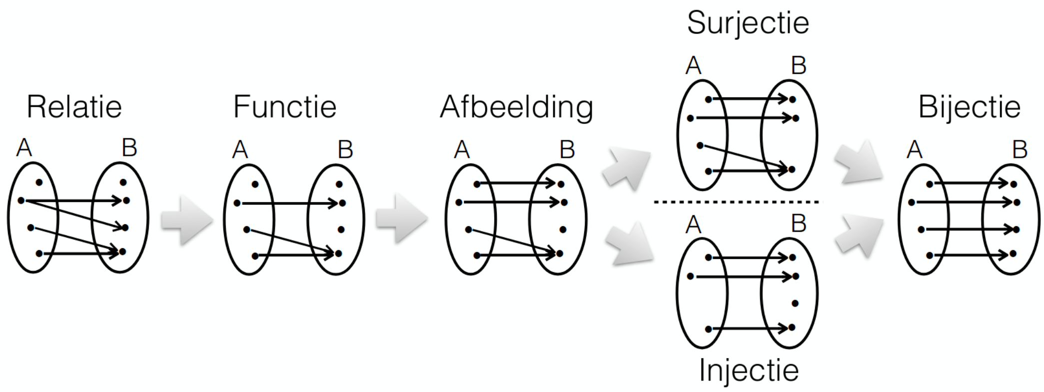
$$A_1 \times A_2 \times \ldots A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

$$A^1 = A \text{ en } \forall n > 1 : A^n = A^{n-1} \times A$$

- Relatie: Een deelverzameling van $A \times B$
- Relatie over $A_1, A_2, \ldots, A_n$: Een deelverzameling van $\prod_{i=1}^{n} A_i$
- Inverse relaties van R: $R^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$
- Samenstelling: $S \circ R = \{(x, y) \mid \exists z \in B; (x, y) \in R \wedge (z, y) \in S\}$
  $R^1 = R$ en $\forall n > 1 : R^n = R \circ R^{n-1}$
  $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$

Hoofdstuk 6

- Functie van A naar B: Een relatie $R \subseteq A \times B$ is een fuctie van A naar B als en slechts als voor elke $x \in A$ hoogstens één $(x, y) \in R$ bestaat.
  $f : A \to B \qquad \forall x \in A : (x, y) \in R \wedge (x, y') \in R \Rightarrow y = y'$
- Domein van $f : A \to B : \{x \mid \exists x : (x, y) \; in f\}$
- Bereik van $f : A \to B : \{y \mid \exists x : (x, y) \; in f\}$
- Afbeelding: Een functie $f : A \to B$ is een afbeelding van A naar B als en slecht als voor elke $x \in A$ precies één $(x, y) \in f$ bestaat.
- Surjectie: Een afbeelding $f : A \to B$ is een surjectie als en slechts als elke $y \in B$ het beeld is van een $x \in A$.
  $\forall y \in B : \exists x \in A : (x, y) \in f$
- Injectie: Een afbeelding $f : A \to B$ is een injectie als en slechts als elke $x \in A$ op een verschillende $y \in B$ afgebeeld wordt.
  $x \neq x' \Leftrightarrow f(x) \neq f(x')$.
- Bijectie: Een relatie $R \subseteq A \times B$ can A naar B als en slechts als voor elke $x \in A$ precies één $(x, y) \in R$ bestaat, en voor elke $y \in B$ precies één $(x, y) \in R$.



- Transformatie: Een functie $f : A \to A$ is een transformatie als en slechts als elke $x \in A$ een beeld heeft onder f.
- Permutatie: Een functie $f : A \to A$ is een permutatie als en slechts als elke $x \in A$ een beeld heeft onder f en precies één keer het beeld is van een x onder f.
- Samenstelling van een $f : A \to B$ en $g : B \to C$ is de functie $h : A \to C : x \mapsto g(f(x))$.
- Inverse functie: $f : A \to B : \forall x \in A : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
  $f^{-1} : B \to A : f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$
- Identitietsfunctie: $i_A : A \to A : x \mapsto x$

Hoofdstuk 7

- Reflexief in $R \subseteq A \times A$: $\forall x \in A : (x, x) \in R$
- Anti-reflexief in $R \subseteq A \times A$: $\forall x \in A : (x, x) \notin R$
- Symetrisch in $R \subseteq A \times A$: $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R)$
- Anti-symetreisch in $R \subseteq A \times A$: $\forall x, y \in A : (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Rightarrow x = y$
- Transitief in $R \subseteq A{\times}A$: $\forall Ax, y, z \in A : (x, y) \in R{\wedge}(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$
- Equivalentierelatie: Een relatie die relexief, symetrisch en transitief is. $(\sim)$
- Equivalentieklasse: De verzameling van alle ellementen van A die equivalent zijn met x. $K(x) = \{y \in A \mid x \sim y\}$
- Partitie: $P = \{P_1, P_2, \cdots, P_n\}$ is een partitie van A als en slechts als
  1. $\forall x \in A : \exists! P_i \in P : x \in P_i$
  2. $\forall P_i \in P : P_i \neq \emptyset$
- Quotiënt verzameling van a onder $\sim$: De partitie van A die bestaat uit alle equivalentieklassen van A onder $\sim$. $A/\sim$
- Orderelatie: Een relatie die reflexief, antisymetrisch en transitief is. $x \preceq y$
- Totale orde: Een orderelatie waarvan geldt dat $\forall x, y : x \preceq y \vee y \preceq x$.
- Partiële orde: Een niet totale orderelatie.
- Geordende verzameling: Een verzameling A waarover een orderelatie $\preceq$ gedefinieerd is. $A, \preceq$
- Bovengrens: $(X \subseteq A, \preceq) a \in A$ is een bovengrens voor X als en slechts als $\forall x \in X : x \preceq a$.
- Ondergrens: $(X \subseteq A, \preceq) a \in A$ is een bovengrens voor X als en slechts als $\forall x \in X : a \preceq x$.
- Supremum van X: $(b \in A, \preceq)$ b is de bovengrens voor X en $b \preceq b'$ (b' = andere bovengrens). Met andere woorden $b =$ kleinste bovengrens.
- Infimum van X: $(o \in A, \preceq)$ o is de ondergrens voor X en $o' \preceq o$ (o' = andere ondergrens). Met andere woorden $o =$ grootste ondergrens.
- Complete tralie: Een geordende verzameling $A, \preceq$ met de eigenschap dat elke $X \subseteq A$ een supremum en een infimum in A heeft.
- Quasi-orde: Een relatie die refexief en transitief is.

Hoofdstuk 8

- Kardinaliteit van een verzameling: Het aantal ellementen dat een verzameling bevat. $|X|$ of $\#S$

  1. $|A| \leq |B|$ als en slechts als er een injectie van A naar B bestaat.
  2. $|A| = |B|$ als en slechts als er een bijectie van A en B bestaat.
  3. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

- Inclusie-exclusie-principe:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{I \subseteq \{1,2,\cdots,n\}, |I| oneven} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| - \sum_{I \subseteq \{1,2,\cdots,n\}, |I| even} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

- Kardinaliteit van het cartesisch product: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- Kardinaliteit van een machtsverzameling: $|P(A)| = 2^{|A|}$
- Aantal afbeeldingen van A naar B: $|B^A| = |B|^{|A|}$
- Aantal injecties van A naar B: $\frac{n!}{(n-m)!}$
- Aantal bijecties van A naar B: $n!$
- Aantal combinaties van m ellementen uit A: $\frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m} = C_n^m$
- Kardinaliteit van $\mathbb{N}$: $\aleph_0$ (aftelbaar oneindig)
- Kardinaliteit van $\mathbb{Z}$: $\aleph_0$
- Kardinaliteit van $\mathbb{Q}$: $\aleph_0$
- Kardinaliteit van $\mathbb{R}$: $\neq \aleph_0$ (onaftelbaar)
- Rekenregels

  1. $\forall n \in \mathbb{N} : n + \aleph_0 = \aleph_0 + n = \aleph_0$
  2. $\forall n \in \mathbb{N} : n \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \cdot n = \aleph_0$
  3. $\forall n \in \mathbb{N} : \aleph_0^n = \aleph_0$
  4. $\forall n \in \mathbb{N}$ met $n > 1 : n^{\aleph_0} \geq \aleph_0$
  5. Het aantal deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ is $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.
  6. Het aantal functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}$ is $\aleph_0^{\aleph_0} > \aleph_0$.