Examen Complexe Analyse
vrijdag 20 juni 2014, 14:00–18:00 uur
Auditorium De Molen

Naam:

Studierichting:

- Het examen bestaat uit 4 schriftelijke vragen.
- Elke vraag telt even zwaar mee.
- Het boek "Visual Complex Functions" van Elias Wegert mag gebruikt worden, evenals de extra beschikbaar gestelde nota's over bepaalde integralen, het argumentprincipe en harmonische functies.
- Uitgewerkte oefeningen en ander materiaal uit de oefenzitting mag niet gebruikt worden.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Kladpapier wordt niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- Succes!

Vraag 1.

5pt (a) Laat zien dat de vergelijking

$$z^5 + 15z + 1 = 0$$

een oplossing heeft in de schijf $|z| < \frac{1}{10}$ en vier oplossingen in het ringgebied $\frac{3}{2} < |z| < 2$.

5pt (b) Zij $n \in \mathbb{N}_0$ en $p(z) = z^n + \cdots$ en $q(z) = z^{n+1} + \cdots$ twee monische veeltermen zonder gemeenschappelijke nulpunten. Bewijs dat voor $R > 0$ groot genoeg geldt dat

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D_R(0)} \frac{p(z)}{q(z)} dz = 1.$$

Antwoord: (a) We definiëren

$$\begin{aligned} f(z) &= z^5 + 15z + 1, \\ g(z) &= 15z + 1, \\ h(z) &= z^5 + 15z = z(z^4 + 15). \end{aligned}$$

De veelterm g heeft precies één nulpunt in $D_{\frac{1}{10}}(0)$, namelijk $z = -\frac{1}{15}$. Als $|z| = \frac{1}{10}$ dan

$$|f(z) - g(z)| = |z|^5 = \frac{1}{10^5}$$

en

$$|g(z)| = |15z + 1| \geq 15|z| - 1 = \frac{15}{10} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Het is dan duidelijk dat $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ voor $|z| = \frac{1}{10}$. Uit de stelling van Rouché volgt dan dat f, net als g, eveneens precies één nulpunt in $D_{\frac{1}{10}}(0)$ heeft.

Voor $|z| = \frac{3}{2}$ hebben we analoog

$$|f(z) - g(z)| = |z|^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

en

$$|g(z)| = |15z + 1| \geq 15|z| - 1 = 15 \cdot \frac{3}{2} - 1 = \frac{43}{2}.$$

Omdat $\left(\frac{3}{2}\right)^5 < \frac{43}{2}$ volgt dat $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ voor $|z| = \frac{3}{2}$. Volgens Rouché hebben f en g ook evenveel nulpunten in $D_{\frac{3}{2}}(0)$. Omdat g precies één nulpunt heeft in $D_{\frac{3}{2}}(0)$ besluiten we dat f ook precies één nulpunt heeft met $|z| < \frac{3}{2}$. We weten al dat er één nulpunt is met $|z| < \frac{1}{10}$. Bijgevolg zijn er geen nulpunten met $\frac{1}{10} \leq |z| < \frac{3}{2}$. Uit $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ voor $|z| = \frac{3}{2}$ concluderen we dat f ook geen nulpunten heeft op de cirkel $|z| = \frac{3}{2}$.

Vervolgens merken we op dat de veelterm h vijf nulpunten heeft in de schijf $|z| < 2$, namelijk $z = 0$, $z = \sqrt[4]{15}e^{\pi i/4}$, $z = \sqrt[4]{15}e^{3\pi i/4}$, $z = \sqrt[4]{15}e^{-\pi i/4}$ en $z = \sqrt[4]{15}e^{-3\pi i/4}$. Merk op dat inderdaad $\sqrt[4]{15} < 2$.

Als $|z| = 2$ dan $|f(z) - h(z)| = 1$ en

$$|h(z)| = |z||z^4 + 15| \geq |z|(|z|^4 - 15) = 2 \cdot (2^4 - 15) = 2$$

Dus $|f(z) - h(z)| < |h(z)|$ geldt voor $|z| < 2$. We gebruiken de stelling van Rouché nogmaals om te concluderen dat f hetzelfde aantal nulpunten heeft als h in $|z| < 2$, namelijk vijf. Omdat f precies één nulpunt heeft in $|z| \leq \frac{3}{2}$ heeft (dat hebben we namelijk hierboven reeds bewezen), concluderen we dat f vier nulpunten heeft in het ringgebied $\frac{3}{2} < |z| < |2|$.

(b) De functie

$$r(z) = p(z) - \frac{1}{n+1}q'(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

is een veelterm van graad ten hoogste $n - 1$. Neem R groot genoeg zodat de nulpunten van q in $D_R(0)$ liggen. We kunnen de gevraagde integraal schrijven als

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D_R(0)} \frac{p(z)}{q(z)} dz = \frac{1}{2\pi i(n+1)} \oint_{\partial D_R(0)} \frac{q'(z)}{q(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D_R(0)} \frac{r(z)}{q(z)} dz \quad (1)$$

Met het argumentprincipe kunnen we de eerste integraal berekenen,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D_R(0)} \frac{q'(z)}{q(z)} dz = n + 1.$$

We moeten dan alleen nog maar bewijzen dat de tweede integraal in de rechterkant van (1) gelijk aan nul is. Voor $R > 0$ groot genoeg zoals hierboven, hangt de integraal niet van R af. Met de ML afschatting volgt

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D_R(0)} \frac{r(z)}{q(z)} dz \right| \leq \frac{2\pi R}{2\pi} \max_{|z|=R} \frac{|r(z)|}{|q(z)|}$$

Omdat r graad $\leq n-1$ heeft en q heeft graad $n+1$ geldt

$$\frac{|r(z)|}{|q(z)|} \leq \frac{M}{|z|^2}$$

voor een zekere constante $M > 0$ als $|z|$ groot genoeg is Dus

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D_R(0)} \frac{r(z)}{q(z)}dz\right| \leq R\frac{M}{R^2} = \frac{M}{R} \quad \to 0 \qquad \text{voor } R \to \infty.$$

De tweede integraal in de rechterkant van (1) is dus gelijk aan 0. Dit bewijst het gevraagde dat

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D_R(0)} \frac{p(z)}{q(z)}dz = 1$$

NB: Dit is niet de enige manier om deze vraag op te lossen. Het kan ook zonder het argumentprincipe.

Vraag 2. Zij $a, p \in \mathbb{C}$ en $n \in \mathbb{N}_0$. Beschouw de functie f die gegeven wordt door

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{(z-p)^{n+1}}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{p\}$$

2pt (a) Bereken het residu van f in $z = p$.

We nemen vanaf nu aan dat $a \in \mathbb{R}$ en $\operatorname{Im} p > 0$ en we zijn geïnteresseerd in de integraal $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

3pt (b) Bereken de integraal in het geval dat $a > 0$.

3pt (c) Bereken de integraal in het geval dat $a < 0$.

2pt (d) Wat kunt u zeggen over de integraal in het geval dat $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$?

Antwoord: (a) $z = p$ is een pool van orde $n+1$ van f. Wij gebruiken dus (4.68), pagina 183,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, p) &= \frac{1}{n!} \lim_{z \to p} \frac{d^n}{dz^n} \left[(z-p)^{n+1} f(z)\right] \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{z \to p} \frac{d^n}{dz^n} \left(e^{iaz}\right) \\ &= \frac{1}{n!} (ia)^n e^{iap}. \end{aligned}$$

(b) Zij γ_R de halve cirkel geparametriseerd door Re^{it}, $0 \le t \le \pi$. Dan is $[-R, R] \oplus \gamma_R$ een gesloten kromme in het bovenhalfvlak, die de pool $z = p$ omsluit in het geval dat $R > |p|$. In dat geval volgt uit onderdeel (a) en de residustelling

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f, p) = \frac{2\pi i}{n!} (ia)^n e^{iap}. \tag{2}$$

We gebruiken de ML afschatting van (4.24) pagina 152 om de integraal over γ_R te schatten,

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)dz \right| \le R\pi \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \ge 0} \frac{|e^{iaz}|}{|z-p|^{n+1}}.$$

Voor $a > 0$ en $\operatorname{Im} z \geq 0$, er geldt $|e^{iaz}| = e^{-a\operatorname{Im} z} \leq 1$ en dus

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z)dz \right| \leq R\pi \frac{1}{(R - |p|)^{n+1}} \overset{R\to\infty}{\to} 0.$$

Uit (2) krijgen we vervolgens door de limiet $R \to \infty$ te nemen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{2\pi i}{n!}(ia)^n e^{iap}.$$

(c) Voor $a < 0$ werkt het niet om met een halve cirkel in het bovenhalfvlak te werken. In plaats daarvan nemen we nu een halve cirkel in het benedenhalfvlak. Beschouw de contour α_R geparametriseerd door Re^{-it} met $0 \leq t \leq \pi$. Dan is $[-R, R] \oplus \alpha_R$ een gesloten kromme in het benedenhalfvlak. Omdat f analytisch is in het benedenhalfvlak volgt vanwege de stelling van Cauchy (of de residustelling) dat

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\alpha_R} f(z)dz = 0. \tag{3}$$

Zoals in (b), schatten we de integraal over α_R af met de MLschatting,

$$\left| \int_{\alpha_R} f(z)dz \right| \leq R\pi \max_{|z|=R, \operatorname{Im} z \leq 0} \frac{|e^{iaz}|}{|z - p|^{n+1}} \leq R\pi \frac{1}{(R - |p|)^{n+1}} \overset{R\to\infty}{\to} 0.$$

waarbij we gebruiken dat $|e^{iaz}| = e^{-a\operatorname{Im} z} \leq 1$ voor $a < 0$ en $\operatorname{Im} z \leq 0$. We nemen de limiet $R \to \infty$ in (3) en we krijgen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 0.$$

(d) Als $a \in \mathbb{C}$ dan geldt voor $x \in \mathbb{R}$

$$|f(x)| = \frac{|e^{iax}|}{|x - p|^{n+1}} = \frac{e^{-(\operatorname{Im} a)x}}{|x - p|^{n+1}}$$

Als $\operatorname{Im} a > 0$ dan zal $|f(x)| \to +\infty$ als $x \to -\infty$.
Als $\operatorname{Im} a < 0$ dan zal $|f(x)| \to +\infty$ als $x \to +\infty$.
In beide gevallen kunnen we niet verwachten dat de integraal $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ convergent is.

Vraag 3. Zij D gegeven door

$$D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x > 0,\ -1 < y < 1\}.$$

2pt (a) Vind het beeld van D onder de afbeelding $z \mapsto e^z$.

4pt (b) Geef een conforme afbeelding φ van D naar de eenheidsschijf $D_1(0)$. Zorg er ook voor dat $\varphi(1) = 0$.

4pt (c) Neem aan dat $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ continu is en holomorf op D. Neem ook aan dat $\operatorname{Re} f(z) = 0$ als $\operatorname{Im} z = \pm 1$.

Bewijs dat f dan een analytische voortzetting heeft tot het rechter half-vlak $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$.

Antwoord: (a) Omdat $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ en $e^x > 1$ als $x > 0$, vinden we dat het beeld van D gelijk is aan

$$\{w \in \mathbb{C} \mid |w| > 1, -1 < \arg w < 1\}.$$

Dit is een sector in het complexe vlak met daaruit het deel binnen de gesloten eenheidsschijf weggenomen.

(b) De afbeelding $f_1(z) = \frac{\pi}{2} z$ beeldt D af op $D_1 = \{z = x + iy \mid x > 0,\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\}$. Daarna beeldt $f_2(z) = e^z$ de horizontale strip D_1 af op $D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid x = \operatorname{Re} z > 0,\ |z| > 1\}$. Dit is het rechterhalfvlak minus de gesloten eenheidsschijf. De Möbiustransformatie $f_3(z) = \frac{z+i}{z-i}$ beeldt D_2 af op het eerste kwadrant $D_3 = \{z = x + iy \mid \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$. We kwadrateren met $f_4(z) = z^2$ en daarbij gaat D_3 over in het bovenhalfvlak D_4.

De samenstelling $f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ is een conforme afbeelding van D naar het bovenhalfvlak waarbij 1 achtereenvolgens overgaat in $f_1(1) = \frac{\pi}{2}$, $f_2(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi}{2}}$, $f_3(e^{\frac{\pi}{2}}) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}+i}{e^{\frac{\pi}{2}}-i}$ en

$$f_4\left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + i}{e^{\frac{\pi}{2}} - i}\right) = \left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + i}{e^{\frac{\pi}{2}} - i}\right)^2 = p.$$

Dan is $p = a + ib$ een punt in het bovenhalfvlak en $f_5(z) = \frac{z-a}{b}$ is een automorfisme van het bovenhalfvlak dat p afbeeldt naar i. Vervolgens nemen we de Cayleyafbeelding $f_6(z) = \frac{z-i}{z+i}$, hetgeen een conforme afbeelding is van het bovenhalfvlak naar de eenheisschijf en $f_6(i) = 0$.

De samenstelling

$$f_6 \circ f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

is de gezochte conforme afbeelding.

NB: dit is niet de enige mogelijke oplossing.

(c) De analytische voortzetting is gebaseerd op een variant van het spiegelingsprincipe van Schwarz (Theorem 6.6.2 uit het boek).

Het spiegelingsprincipe is geformuleerd voor analytische functies die reëel zijn op (een deel van de) reële as. We kunnen het aanpassen voor functies die zuiver imaginair zijn op de reële as.

Lemma 1 Zij G een gebied dat symmetrisch is in de reële as. Zij $G_0 = \{z \in G \mid \operatorname{Im} z = 0\}$, $G_+ = \{z \in G \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ en $G_- = \{z \in G \mid \operatorname{Im} z < 0\}$. Neem aan dat $f : G_0 \cup G_+ \to \mathbb{C}$ continu is, analytisch op G_+ en $\operatorname{Re} f(z) = 0$ voor $z \in G_0$. Dan heeft f een analytische voortzetting tot G gegeven door

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{voor } z \in G_+ \cup G_0 \\ -\overline{f(\overline{z})} & \text{voor } z \in G_- \end{cases}$$

Bewijs De functie $h(z) = if(z)$ is reëelwaardig op G_0 en uiteraard continu op $G_0 \cup G_+$ en analytisch op G_+. Volgens Theorem 6.6.2. is er een analytische voortzetting H tot G, gegeven door

$$H(z) = \begin{cases} h(z) & \text{voor } z \in G_+ \cup G_0 \\ \overline{h(\overline{z})} & \text{voor } z \in G_- \end{cases}$$

Dan is $-iH$ de analytische voortzetting van f en dit is precies de functie F zoals gegeven in het lemma. $\square$

In plaats van spiegeling in de reële rechte kunnen we ook spiegelen in een andere rechte. In het bijzonder kunnen we dit doen voor de functie f uit vraag 3(c) die analytisch is op de horizontale strip D zoals in de opgave, en die continu uitbreiding heeft tot $\operatorname{Im} z = -1$ en $\operatorname{Im} z = 1$ en daar zuivere imaginaire waarden aanneemt.

Na spiegeling in $\operatorname{Im} z = -1$ vinden we een uitbreiding f_1 van f gegeven door

$$f_1(z) = \begin{cases} f(z) & \text{voor } -1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1 \\ -\overline{f(\overline{z} - 2i)} & \text{voor } -3 \leq \operatorname{Im} z < -1 \end{cases}$$

Dan is f_1 analytisch in

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, -3 < \operatorname{Im} z < 1\}$$

continu op de sluiting hiervan, en de waarden voor $\mathrm{Im}\, z = 1$ en $\mathrm{Im}\, z = -3$ zijn zuiver imaginair. Voor $\mathrm{Im}\, z = 1$ is dit meteen duidelijk omdat dan $f_1(z) = f(z)$ en $f(z)$ is zuiver imaginar. Voor $\mathrm{Im}\, z = -3$ is $\mathrm{Im}\,(\overline{z}-2i) = -\mathrm{Im}\, z - 2 = 1$ zodat $f(\overline{z} - 2i)$ zuiver imaginair is en dan is ook $f_1(z) = -\overline{f(\overline{z} - 2i)}$ zuiver imaginair.

We kunnen nu doorgaan door (bv.) te spiegelen in de rechte $\mathrm{Im}\, z = 1$. Dan vinden we de volgende uitbreiding van f_1 (die we f_2 noemen):

$$f_2(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{voor } -3 \leq \mathrm{Im}\, z \leq 1 \\ -\overline{f(\overline{z} + 2i)} & \text{voor } 1 < \mathrm{Im}\, z \leq 5 \end{cases}$$

Dan is f_2 analytisch in

$$D_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 0,\ -3 < \mathrm{Im}\, z < 5\}$$

met continue randwaarden op $\overline{D_2}$ en de randwaarden zijn zuiver imaginair voor $\mathrm{Im}\, z = -3$ en $\mathrm{Im}\, z = 5$.

Hiermee kunnen we doorgaan. Uiteindelijk vinden we een analytische voortzetting van f tot het hele rechterhalfvlak.

Vraag 4.

6pt (a) Zij $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ een holomorfe functie die niet constant is. Bewijs dat $f(\mathbb{C})$ dicht ligt in $\mathbb{C}$.

4pt (b) Zij $D = D_1(0)$ de eenheidsschijf. We noteren met $\mathcal{F}$ de collectie van holomorfe functies $f : D \to \mathbb{C}$ waarvoor geldt dat $\operatorname{Re} f > 0$ op D en $f(0) = 1$.

Bewijs dat $\mathcal{F}$ een normale familie is.

Antwoord: (a) Neem aan dat $f(\mathbb{C})$ niet dicht ligt in $\mathbb{C}$. Dan bestaan er een $w_0 \in \mathbb{C}$ en een $r > 0$ met $D_r(w_0) \cap f(\mathbb{C}) = \emptyset$. Dit betekent dat $|f(z) - w_0| \geq r$ geldt voor elke $z \in \mathbb{C}$. De functie

$$g : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

is dan goed gedefinieerd, g is analytisch en

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w_0|} \leq \frac{1}{r} \qquad \text{voor } z \in \mathbb{C}.$$

Bijgevolg is g een begrensde gehele functie. Vanwege de stelling van Liouville is g constant, zeg $g(z) = c \in \mathbb{C}$ voor elke $z \in \mathbb{C}$. Het is duidelijk uit de definitie van g dat g nergens nul is. Dus $c \neq 0$. Dan volgt voor elke $z \in \mathbb{C}$ dat

$$f(z) = w_0 + \frac{1}{g(z)} = w_0 + \frac{1}{c}$$

en dus is f constant.

(b) Vanwege de stelling van Montel (Theorem 5.2.6 uit het boek van Wegert) is het voldoende om te laten zien dat de familie $\mathcal{F}$ lokaal begrensd is. Omdat de functies uit $\mathcal{F}$ gedefinieerd zijn op de eenheidsschijf kunnen we ons hierbij tevens beperken tot gesloten schijven $K_r = \overline{D_r(0)}$ met $0 < r < 1$. Immers, elke compacte deelverzameling K van D is bevat in K_r voor zekere $r \in (0, 1)$ en als $\mathcal{F}$ begrensd is op elke K_r dan is $\mathcal{F}$ begrensd op elke compacte deelverzameling van D.

Kies dus $r \in (0, 1)$. We moeten laten zien dat er een $M \geq 0$ bestaat zodanig dat

$$\forall f \in \mathcal{F} : \forall z \in K_r : |f(z)| \leq M.$$

Zij $R = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ het rechterhalfvlak. We gebruiken de conforme afbeelding

$$\varphi : R \to D : z \mapsto \varphi(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

die R conform afbeeldt op de eenheidsschijf D met $\varphi(1) = 0$. Voor elke $f \in \mathcal{F}$ is dan $\varphi \circ f$ een analytische functie van D naar D met $(\varphi \circ f)(0) = 0$. Uit het Lemma van Schwarz geldt dat

$$\forall z \in D : |(\varphi \circ f)(z)| \leq |z|$$

Als $z \in K_r$ dan volgt hieruit dat $\varphi(f(z)) \in K_r$ en dus dat $f(z) \in \varphi^{-1}(K_r)$. De inverse functie $\varphi^{-1} : D \to R$ is analytisch en dus zeker continu. Omdat K_r compact is is $\varphi^{-1}(K_r)$ bijgevolg ook compact en dus begrensd. Er is dus een $M \geq 0$ zodanig dat

$$\forall w \in \varphi^{-1}(K_r) : |w| \leq M$$

Omdat $f(z) \in \varphi^{-1}(K_r)$ voor elke $z \in K_r$ betekent dit ook dat

$$\forall z \in K_r : |f(z)| \leq M.$$

Merk op dat M onafhankelijk gekozen is van $f \in \mathcal{F}$. Dus $\mathcal{F}$ is inderdaad begrensd op K_r.

Hiermee is bewezen dat $\mathcal{F}$ een normale familie is.