Examen Complexe Analyse
vrijdag 20 juni 2014, 14:00–18:00 uur
Auditorium De Molen

Naam:

Studierichting:

- Het examen bestaat uit 4 schriftelijke vragen.
- Elke vraag telt even zwaar mee.
- Het boek "Visual Complex Functions" van Elias Wegert mag gebruikt worden, evenals de extra beschikbaar gestelde nota's over bepaalde integralen, het argumentprincipe en harmonische functies.
- Uitgewerkte oefeningen en ander materiaal uit de oefenzitting mag niet gebruikt worden.
- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen. Kladpapier wordt niet nagekeken en hoeft u niet in te leveren.
- Schrijf de antwoorden op deze bladen en vul eventueel aan met losse bladen.
- Succes!

Vraag 1

5pt (a) Laat zien dat de vergelijking

$$z^5 + 15z + 1 = 0$$

een oplossing heeft in de schijf $|z| < \frac{1}{10}$ en vier oplossingen in het ringgebied $\frac{3}{2} < |z| < 2$.

5pt (b) Zij $n \in \mathbb{N}_0$ en $p(z) = z^n + \cdots$ en $q(z) = z^{n+1} + \cdots$ twee monische veeltermen zonder gemeenschappelijke nulpunten. Bewijs dat voor $R > 0$ groot genoeg geldt dat

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D_R(0)} \frac{p(z)}{q(z)} dz = 1.$$

Vraag 2 Zij $a, p \in \mathbb{C}$ en $n \in \mathbb{N}_0$. Beschouw de functie f die gegeven wordt door

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{(z-p)^{n+1}}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{p\}$$

2pt (a) Bereken het residu van f in $z = p$.

We nemen vanaf nu aan dat $a \in \mathbb{R}$ en Im $p > 0$ en we zijn geïnteresseerd in de integraal $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

3pt (b) Bereken de integraal in het geval dat $a > 0$.

3pt (c) Bereken de integraal in het geval dat $a < 0$.

2pt (d) Wat kunt u zeggen over de integraal in het geval dat $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$?

Vraag 3 Zij D gegeven door

$$D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x > 0,\ -1 < y < 1\}.$$

2pt (a) Vind het beeld van D onder de afbeelding $z \mapsto e^z$.

4pt (b) Geef een conforme afbeelding φ van D naar de eenheidsschijf $D_1(0)$. Zorg er ook voor dat $\varphi(1) = 0$.

4pt (c) Neem aan dat $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ continu is en holomorf op D. Neem ook aan dat $\operatorname{Re} f(z) = 0$ als $\operatorname{Im} z = \pm 1$.

Bewijs dat f dan een analytische voortzetting heeft tot het rechter half-vlak $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$.

Vraag 4

6pt (a) Zij $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ een holomorfe functie die niet constant is. Bewijs dat $f(\mathbb{C})$ dicht ligt in $\mathbb{C}$.

4pt (b) Zij $D = D_1(0)$ de eenheidsschijf. We noteren met $\mathcal{F}$ de collectie van holomorfe functies $f : D \to \mathbb{C}$ waarvoor geldt dat $\operatorname{Re} f > 0$ op D en $f(0) = 1$.

Bewijs dat $\mathcal{F}$ een normale familie is.