Calculus I, 20/10/2014

---

1. Gegeven de kromme y(x) waarvoor

$$arctan(\frac{y}{x}) = \frac{1}{2}ln(x^2 + y^2) \tag{1}$$

(a) Bereken de afgeleide y' voor een punt (x,y) dat voldoet aan het functievoorschrift.
(b) Gebruik de gevonden uitdrukking voor de afgeleide om de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van die kromme in het punt (1,0) op te stellen.
(c) Beargumenteer (met nauwkeurige argumentatie in elke stap!) vanuit het gegeven verband tussen x en y dat de volgende twee waarden (merk op: de kromme is niet de grafiek van een functie!) voor de rechterlimiet (voor $x > 0$) gelden:

$$\lim_{x \to 0+} y(x) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$$
$$\lim_{x \to 0+} y(x) = e^{\frac{\pi}{2}}$$

(2.5 ptn)

Antwoord:

(a) We leiden beide zijden van dit funtievoorschrit af. Gebruik makende van de kettingregel en

$$\frac{d}{dx}arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\frac{d}{dx}ln(x) = \frac{1}{x}$$

Dit geeft:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}arctan(\frac{y}{x}) &= \frac{d}{dx}\frac{1}{2}ln(x^2+y^2) \\
\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{d}{dx}\frac{y}{x} &= \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2+y^2) \\
\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{x\frac{d}{dx}y - y\frac{d}{dx}x}{x^2} &= \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}(2x+2y\frac{d}{dx}y) \\
\frac{xy'-y}{x^2+y^2} &= \frac{1}{2}\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2} \\
xy'-y &= x+yy' \\
xy'-yy' &= x+y \\
y'(x-y) &= x+y \\
y' &= \frac{x+y}{x-y} \qquad (2)
\end{aligned}$$

(b) De afgeleide in een punt is de slope van de raaklijn aan dat punt. Gebruik makende van vergelijking (2) berekenen we de slope in het punt (1,0):

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1+0}{1-0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

De vergelijking voor een rechte met slope m door het punt (x_1, y_1) geeft dan:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y &= x - 1 \end{aligned}$$

(c) We beginnen met de rechterlimiet ($x > 0$) te nemen van beide leden van vergelijking (1):

$$\lim_{x \to 0+} arctan(\frac{y}{x}) = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{2} ln(x^2 + y^2)$$

De arctan en ln functies zijn continue functies, dus kunnen we de limiet naar binnen brengen. Dit geeft:

$$\begin{aligned} arctan(\lim_{x \to 0+} \Big(\frac{y}{x}\Big)) &= \frac{1}{2} ln\Big(\lim_{x \to 0+} (x^2 + y^2)\Big) \\ arctan\Big(\lim_{x \to 0+} \frac{y}{x}\Big) &= \frac{1}{2} ln\Big(\lim_{x \to 0+} (y^2)\Big) \\ arctan\Big(\lim_{x \to 0+} \frac{y}{x}\Big) &= ln\Big(\lim_{x \to 0+} |y|\Big) \end{aligned} \tag{3}$$

Voor we verder gaan moeten we eerste een aantal gevallen voor limietwaarde uitsluiten:
Stel $\lim_{x \to 0+} y = 0$, dan

$$\begin{aligned} ln\Big(\lim_{x \to 0+} y\Big) &= ln(0) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Maar het bereik van de arctan is het open interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, dus kan $\lim_{x \to 0+} y$ niet gelijk zijn aan 0.
Stel $\lim_{x \to 0+} y = \infty$, dan

$$\begin{aligned} ln\Big(\lim_{x \to 0+} y\Big) &= ln(\infty) \\ &= \infty \end{aligned}$$

Maar het bereik van de arctan is het open interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, dus kan $\lim_{x \to 0+} y$ niet gelijk zijn aan ∞.
Stel $\lim_{x \to 0+} y = -\infty$, dan

$$ln\Big(\lim_{x \to 0+} y\Big) = ln(-\infty) \tag{4}$$

Maar ln(x) is niet gedefinieerd voor $x < 0$ en arctan(x) is gedefinieerd over de hele reële as dus kan $\lim_{x \to 0+} y$ niet gelijk zijn aan $-\infty$.
Met deze informatie kunnen we verder met vergelijking (3), rekening houdend met 2 gevallen:
Geval 1: de functie y(x) is positief voor x-waarden nabij 0.

$$\begin{aligned}
arctan(\lim_{x \to 0+} \left(\frac{y}{x}\right)) &= ln\Big(\lim_{x \to 0+} |y|\Big) \\
arctan\Big(\frac{\lim_{x \to 0+} y}{\lim_{x \to 0+} x}\Big) &= ln\Big(\lim_{x \to 0+} y\Big) \\
arctan(\infty) &= ln\Big(\lim_{x \to 0+} y\Big) \\
\frac{\pi}{2} &= ln\Big(\lim_{x \to 0+} y\Big) \\
e^{\frac{\pi}{2}} &= \lim_{x \to 0+} y
\end{aligned}$$

Geval 2: de functie y(x) is negatief voor x-waarden nabij 0.

$$\begin{aligned}
arctan(\lim_{x \to 0+} \left(\frac{y}{x}\right)) &= ln\Big(\lim_{x \to 0+} |y|\Big) \\
arctan\Big(\frac{\lim_{x \to 0+} y}{\lim_{x \to 0+} x}\Big) &= ln\Big(\lim_{x \to 0+} -y\Big) \\
arctan(-\infty) &= ln\Big(\lim_{x \to 0+} -y\Big) \\
-\frac{\pi}{2} &= ln\Big(\lim_{x \to 0+} -y\Big) \\
e^{-\frac{\pi}{2}} &= \lim_{x \to 0+} -y \\
-e^{-\frac{\pi}{2}} &= \lim_{x \to 0+} y
\end{aligned}$$

Beide gevallen voldoen aan het gegeven verband tussen x en y, dus beide waarden voor de rechterlimiet zijn geldig.

Calculus I, 20/10/2014

---

2. (a) Gegeven de functie $p(x) = x^2 - 1$. Bepaal de limiet

$$\lim_{x\to 0} p(3 + 2p(x - p(x)))$$

(b) Bereken de vier vierde machtswortels van het complexe getal bekomen via

$$(2\sqrt{3} + i2)(-\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt(3)}{4})$$

(2.5 ptn)

Antwoord:
(a) Als polynoom is de functie $p(x)$ continu, dus kunnen we de limiet naar binnen brengen:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} p(3 + 2p(x - p(x))) &= p(\lim_{x\to 0}\Big(3 + 2p(x - p(x))\Big)) \\
&= p(3 + 2p(\lim_{x\to 0}\Big(x - p(x)\Big))) \\
&= p(3 + 2p\Big(0 - p(\lim_{x\to 0} x)\Big)) \\
&= p(3 + 2p(0 - p(0))) \\
&= p(3 + 2p(1)) \\
&= p(3) \\
&= 8
\end{aligned}$$

(b) We beginnen met het complexe getal z om te zetten in de vorm $a + bi$:

$$\begin{aligned}
(2\sqrt{3} + i2)(-\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}) &= \Big(-\frac{2\sqrt{3}}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{4}\Big) + \Big(2\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{4} + (-\frac{2}{4})\Big)i \\
&= -\sqrt{3} + \Big(\frac{6}{4} - \frac{2}{4}\Big)i \\
&= -\sqrt{3} + i
\end{aligned}$$

Vervolgens bereken we het argument θ en de modulus $|z|$ om het complexe getal in polaire vorm om te zetten. De modulus kan bekomen worden via:

$$\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (1)^2} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Het argument kan bekomen worden via:

$$\begin{aligned}\theta &= arctan(\frac{1}{-\sqrt{3}}) \\ &= \frac{5\pi}{6}\end{aligned} \tag{5}$$

Merk op dat de $arctan(\frac{1}{-\sqrt{3}})$ ook de hoek $-\frac{\pi}{6}$ als resultaat geeft, maar dit kan uitgesloten worden door de kijken in welk quadrant $-\sqrt{3}+i$ zich bevind. Het argument kan ook bekomen worden zonder gebruik te maken van de arctan door z te plotten in het complexe vlak en gebruik te maken van sinus of cosinus.
We kunnen dus z herschrijven als:

$$z = 2(cos\Big(\frac{5\pi}{6}\Big) + isin\Big(\frac{5\pi}{6}\Big))$$

De vier vierdemachtswortels zijn dan gelijk aan:

$$\begin{aligned}
w_1 &= |z|^{1/4}\Big(cos\frac{\theta}{4} + isin\frac{\theta}{4}\Big) \\
&= 2^{1/4}\Big(cos\frac{5\pi}{24} + isin\frac{5\pi}{24}\Big) \\
w_2 &= |z|^{1/4}\Big(cos\frac{\theta+2\pi}{4} + isin\frac{\theta+2\pi}{4}\Big) \\
&= 2^{1/4}\Big(cos\frac{17\pi}{24} + isin\frac{17\pi}{24}\Big) \\
w_3 &= |z|^{1/4}\Big(cos\frac{\theta+4\pi}{4} + isin\frac{\theta+4\pi}{4}\Big) \\
&= 2^{1/4}\Big(cos\frac{29\pi}{24} + isin\frac{29\pi}{24}\Big) \\
w_4 &= |z|^{1/4}\Big(cos\frac{\theta+6\pi}{4} + isin\frac{\theta+6\pi}{4}\Big) \\
&= 2^{1/4}\Big(cos\frac{41\pi}{24} + isin\frac{41\pi}{24}\Big)
\end{aligned}$$

Calculus I, 20/10/2014

Puntenverdeling:

Vraag 1a: 1.5 pt.
0.25 voor het idee van impliciet afleiden.
0.75 voor het correct gebruik van de afgeleidens van arctan(x) en ln(x) en de kettingregel.
0.50 voor een correcte uitwerking.

Vraag 1b: 0.25 pt
0.25 voor het correct opstellen van de raaklijn. Moest een raaklijn correct worden opgesteld, maar met een foute waarde voor de slope wegens een fout antwoord op vraag (a) worden de punten voor deze deelvraag nog steeds toegekend.

Vraag 1c: 0.75 pt
0.25 punten voor het correct uitsluiten voor bepaalde limietwaarden van y(x).
0.25 voor de opsplitsing van y is negatief en positief.
0.25 punten voor de correct uitwerking.

Vraag 2a: 1 pt
0.5 voor het idee van de limiet binnenbrengen.
0.5 voor de correcte uitwerking.
Moest deze oefening worden opgelost door de gegeven functie helemaal uit te werken en dan de limiet te nemen word het punt alleen toegekend als de oplossing helemaal correct is.

Vraag 2b: 1.5 pt
0.5 voor het uitwerken van het complexe getal.
0.25 voor het berekenen van het argument en de modulus.
0.5 voor de correcte methode van het nemen van de wortels .
0.25 voor de uitwerking.

Calculus I, 20/10/2014

Algemee opmerkingen:

- Vraag 1(a) is door de meeste studenten correct opgelost. Fouten die hier gemaakt werden zijn vooral tegen het gebruik van de kettingregel omtrend het afleiden van y. Denk eraan, y is in feite een functie afhankelijk van veranderlijke x, en dus niet zomaar een veranderlijke zelf. Impliciet afleiden is dus het antwoord. Studenten die hier fout gegaan zijn kijken best nog eens naar sectie 2.9.
- Vraag 1(b) is ook door de meeste studenten correct opgelost. Enkele keren werd wel de fout gemaakt dat wanneer de afgeleide van vraag (a) werd genomen voor de slope te berekenen, het punt (1,0) niet werd ingevuld om een waarde te bekomen, maar in functie van x en y bleef staan, en zo verder uitgerekend. Dit kwam dan soms een kwadatische vergelijking uit wat natuurlijk geen raaklijn kan zijn, aangezien dat een rechte is.
- Vraag 1(c) was duidelijk de moeilijkste van het examen. Het belangrijkste hier is om een onderscheiding te maken tussen de mogelijkheid dat y zowel positief als negatief kan zijn voor zijn limiet. Vaak werd gezegd dat de limiet van (y/x) naar ∞ of $-\infty$ gaat, maar dit is alleen triviaal wanneer de limiet van y een eindig niet-nul getal is. Om te bewijzen dat de limiet van y niet 0, ∞ of $-\infty$ kan men kijken naar het domein en bereik van de ln (rechterlid). Ook waren er een aantal die in de war waren omtrend het domein en bereik van de boogtangens. Kijk hiervoor terug naar sectie 3.5.
- Vraag 2(a): de meest voorkomende fouten hier zijn simpele rekenfouten bij het uitwerken van de functie, vooral door vergissingen bij het groot aantal haakjes. Een tip hier is om haakjes van verschillende grootte en vorm te gebruiken zodat toch altijd duidelijk is wat er tussen welke haakjes staat. De functie uitwerken kan echter compleet vermeden worden door de limiet naar binnen te brengen, aangezien p(x) een continue functie is. Een klein aantal studenten vergisten zich echter bij de manier om een samengestelde functie uit te werken. Zo is $f(g(x))$ niet zomaar hetzelfde als $f(x) \cdot g(x)$, en ook niet zomaar hetzelfde als $g(f(x))$. Zie sectie 2.4 voor de regels van samengestelde funcies.
- De meest voorkomende fout bij vraag 2(b) kwam bij het bepalen van het argument van het complexe getal. De boogtangens kan 2 waarden teruggeven, en voor het kiezen van de juiste moet je kijken naar in welk quadrant het complexe getal ligt. En ander vaak voorkomende fout is bij het bepalen van de wortels zelf. Kijk goed bij de formules van de wortels wat er binnen de cosinus en sinus allemaal zich boven en onder de breukstreep bevind. Een aantal studenten pasten ook het feit dat de 4 wortels zich op de hoekpunten van een vierkant bevinden fout toe. De zijden van dit vierkant staan niet altijd loodrecht op de assen (zoals het voorbeeld op het einde van sectie A.1), dus zomaar de eerste gevonden wortel spiegelen over de assen is niet altijd de correcte oplossing.