

Calculus I deexamen I: de antwoorden

grts David

19 november 2018

Vraag 1 (2 ptn)

a)

$$L(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Geef het domein en het bereik en zeg of dit al dan niet een even of oneven functie is.

b) Bepaal de *globale* extrema van L in het interval $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$ (kan zijn dat dit een ander interval was maar het maakt niet uit voor de oplossing).

c) Toon aan dat

$$\int xL(x)dx = \frac{-1}{L(x)} + C$$

Oplossing

a) Het domein is $] -1, 1[$, want de noemer moet een reëel getal verschillend van 0 zijn. Het bereik is $[1, +\infty[$. De functie is even, want $L(-x) = L(x)$.

b) We leiden L af naar x :

$$L'(x) = x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

Het enige nulpunt van L' in het domein is $x = 0$. Als we de grafiek/tekentabel/ 2^e afgeleide bekijken zien we dat $(0, 1)$ een lokaal minimum is, in het bijzonder het enige. Aangezien L continu is, is dit ook een globaal minimum.

c) De integraal berekenen is niet zo leuk, dus we leiden het rechterlid af:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{-1}{L(x)} + C \right) = \frac{d}{dx} \left(-\sqrt{1-x^2} + C \right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = xL(x)$$

Nu kunnen we gewoon de hoofdstelling van de integraalrekening toepassen om het gevraagde te vinden.

Vraag 2 (3 ptn)

a)

$$f(x) = \tan^{-1}(e^x)$$

Bewijs dat voor alle x in $\mathbb{R}$ geldt dat $0 < f(x) < \frac{\pi}{2}$.

b)

$$g(x) = \frac{1}{2} \tan^{-1}(\sinh x)$$

Bewijs dat voor alle x in $\mathbb{R}$ geldt dat $f(x) = g(x) + c$ met een zekere constante $c \in \mathbb{R}$ en bepaal c .

c) Bereken de integraal

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \frac{\pi}{4} \right) dx$$

Oplossing

a) Een manier is om te kijken naar het domein/bereik van de onderdelen. Een andere manier is om te berekenen dat

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ en } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

Dus het interval $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ wordt afgebeeld op $]0, \frac{\pi}{2}[$ aangezien f continu is.

b) We gaan zowel f als g afleiden. We krijgen dat

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{1 + e^{2x}} e^x = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

Voor g maken we gebruik van de handige identiteit $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (alles uitschrijven en uiwerken gaat ook):

$$\frac{dg}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \sinh^2 x} \cosh x = \frac{\cosh x}{2 \cosh^2 x} = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

Dus zijn f en g op een constante na gelijk. Om c te bepalen kunnen we gewoon een willekeurige x kiezen, bijvoorbeeld 0:

$$f(0) = \frac{\pi}{4} \text{ en } g(0) = 0, \text{ dus } c = \frac{\pi}{4}$$

c) We gebruiken het resultaat van b) en vervangen $f(x) - \frac{\pi}{4}$ met $g(x)$. Nu bekijken we g en zien we dat het een oneven functie is (samenstelling van twee oneven functies). Dus is de symmetrische integraal rond de oorsprong gelijk aan 0.

Vraag 3 (3 ptn)

a)

$$G(x) = \sin x \cos x \text{ met } x \in [0, \pi]$$

Elke raaklijn aan G snijdt de y -as in een punt $(0, b)$. Bepaal de minimale en maximale waarden van b .

b) Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$y'(x) + y(x) = G(x)$$

c) f is een continu afleidbare functie waarvan we het volgende weten:

- $f(\frac{\pi}{3}) = \pi$
- In het interval $[0, \frac{3\pi}{4}]$ geldt er dat $f(x + \frac{\pi}{4}) = f(x)$

Zij $h(x) = f(x)G(x)$. Bewijs dat er een c bestaat waarvoor $h'(c) = -\sqrt{3}$.

Oplossing

De hele oefening is veel gemakkelijker als je inzielt dat

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

a) We bepalen eerst de richtingscoëfficiënt van $G'(x) = \cos 2x$. We bekijken de raaklijn in een punt $x = t$. De vergelijking is dan

$$y(x) - y(t) = G'(t)(x - t) \text{ dus } y(x) = \cos 2t \cdot (x - t) + \frac{1}{2} \sin 2t$$

Het snijpunt met de y -as krijgen we door x gelijk te stellen aan 0:

$$b(t) = -t \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t$$

Hiervan zoeken we de extrema:

$$\frac{db}{dt} = 2t \sin 2t \text{ en de nulpunten zijn } t \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$$

We moeten de randpunten $x = 0$ en $x = \pi$ er ook bij nemen, maar we hebben ze al. Nu moeten we gewoon nog elk van de drie lokale extrema invullen in $b(t)$ om te vinden dat de minimale en maximale waarden van b gelijk zijn aan $-\pi$ en $\frac{\pi}{2}$.

b) De eerste stap is om de homogene vergelijking $y'(x) + y(x) = 0$ op te lossen. Dit levert

$$y(x) = ce^{-x}$$

Nu passen we de methode van de integrerende factor toe om te krijgen dat

$$y(x) = e^{-x} \int e^x G(x) dx = \frac{1}{2} e^{-x} \int e^x \sin 2x dx$$

Deze integraal staat in het formularium (partieel integreren met recurrentie zou waarschijnlijk ook lukken) dus we vullen in:

$$y(x) = \frac{1}{2} e^{-x} \left(\frac{e^x}{5} (\sin 2x - 2 \cos 2x) + C \right) = \frac{1}{10} \sin 2x - \frac{1}{5} \cos 2x + Ce^{-x}$$

en we zijn klaar.

c) Dit is de moeilijkste vraag van het examen (vond ik). Het eerste inzicht is om de gemiddelde-waardestelling te gebruiken:

$$\exists c \in [a, b] : h'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a}$$

Nu moeten we enkel a en b juist kiezen. Aangezien we de waarde van f enkel weten in drie punten, hebben we niet echt veel keus. We berekenen eerst $h(x)$ voor elk van deze punten:

$$h\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{4}; h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{4}; h\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{-\pi}{4}$$

Vervolgens passen we de GW-stelling toe:

$$\exists c_1 : h'(c_1) = \frac{\frac{-\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}\pi}{4}}{\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}} = -1 - \sqrt{3}$$

Dit is niet wat we wilden krijgen, maar als we de GW-stelling opnieuw toepassen op een ander interval krijgen we

$$\exists c_2 : h'(c_2) = \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}\pi}{4}}{\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - 1$$

Nu kunnen we de tussenwaardestelling toepassen op de continue functie h' , want aangezien $h'(c_1) < -\sqrt{3} < h'(c_2)$, moet er ergens tussen c_1 en c_2 een c liggen zodat $h'(c) = -\sqrt{3}$.