Calculus I deelexamen I: de antwoorden

door een Winees

20 november 2018

Vraag 1 (2 ptn)

a)

$$L(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Geef het domein en het bereik en zeg of dit al dan niet een even of oneven functie is.

b) Bepaal de *globale* extrema van L in het interval $[\frac{-1}{4}, \frac{1}{2}]$.

c) Toon aan dat

$$\int xL(x)dx = \frac{-1}{L(x)} + C$$

Oplossing

a) Het domein is $]-1,1[$, want de noemer moet een reëel getal verschillend van 0 zijn. Het bereik is $[1,+\infty[$. De functie is even, want $L(-x) = L(x)$.

b) We leiden L af naar x:

$$L'(x) = x(1-x^2)^{\frac{-3}{2}}$$

Het enige nulpunt van L' in het domein is $x = 0$. Als we de grafiek/tekentabel/2^e afgeleide bekijken zien we dat (0, 1) een lokaal minimum is, in het bijzonder het enige. Aangezien L continu is, is dit ook een globaal minimum. Verder moeten we nog kijken naar de randpunten van het interval. Hiervan is $(\frac{1}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$ een maximum van L in het interval, en we zijn klaar.

c) De integraal berekenen is niet zo leuk, dus we leiden het rechterlid af:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{-1}{L(x)} + C\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\sqrt{1-x^2} + C\right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = xL(x)$$

Nu kunnen we gewoon de hoofdstelling van de integraalrekening toepassen om het gevraagde te vinden.

Vraag 2 (3 ptn)

a)

$$f(x) = \tan^{-1}(e^x)$$

Bewijs dat voor alle x in $\mathbb{R}$ geldt dat $0 < f(x) < \frac{\pi}{2}$.

b)

$$g(x) = \frac{1}{2}\tan^{-1}(\sinh x)$$

Bewijs dat voor alle x in $\mathbb{R}$ geldt dat $f(x) = g(x) + c$ met een zekere constante $c \in \mathbb{R}$ en bepaal c.

c) Bereken de integraal

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - \frac{\pi}{4} \right) dx$$

Oplossing

a) Een manier is om te kijken naar het domein/bereik van de onderdelen. Een andere manier is om te berekenen dat

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \text{ en } \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

Dus het interval $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ wordt afgebeeld op $]0, \frac{\pi}{2}[$ aangezien f continu is.

b) We gaan zowel f als g afleiden. We krijgen dat

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+e^{2x}}e^x = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

Voor g maken we gebruiken van de handige identiteit $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (alles uitschrijven en uitwerken gaat ook):

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\sinh^2 x}\cosh x = \frac{\cosh x}{2\cosh^2 x} = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

Dus zijn f en g op een constante na gelijk. Om c te bepalen kunnen we gewoon een willekeurige x kiezen, bijvoorbeeld 0:

$$f(0) = \frac{\pi}{4} \text{ en } g(0) = 0, \text{ dus } c = \frac{\pi}{4}$$

c) We gebruiken het resultaat van b) en vervangen $f(x) - \frac{\pi}{4}$ met $g(x)$. Nu bekijken we g en zien we dat het een oneven functie is (samenstelling van twee oneven functies). Dus is de symmetrische integraal rond de oorsprong gelijk aan 0.

Vraag 3 (3 ptn)

a)

$$G(x) = \sin x \cos x \text{ met } x \in [0, \pi]$$

Elke raaklijn aan G snijdt de y-as in een punt $(0, b)$. Bepaal de minimale en maximale waarden van b.

b) Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$y'(x) + y(x) = G(x)$$

c) f is een continu afleidbare functie waarvan we het volgende weten:

- $f(\frac{\pi}{3}) = \pi$
- In het interval $[0, \frac{3\pi}{4}]$ geldt er dat $f(x + \frac{\pi}{4}) = f(x)$

Zij $h(x) = f(x)G(x)$. Bewijs dat er een c bestaat waarvoor $h'(c) = -\sqrt{3}$.

Oplossing

De hele oefening is veel gemakkelijker als je inziet dat

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

a) We bepalen eerst de afgeleide $G'(x) = \cos 2x$. We bekijken vervolgens de raaklijn in een punt $x = t$. De vergelijking is dan

$$y(x) - y(t) = G'(t)(x - t) \text{ dus } y(x) = \cos 2t \cdot (x - t) + \frac{1}{2}\sin 2t$$

Het snijpunt met de y-as krijgen we door x gelijk te stellen aan 0:

$$b(t) = -t\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t$$

Hiervan zoeken we de extrema:

$$\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = 2t\sin 2t \text{ en de nulpunten zijn } t \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi\}$$

We moeten de randpunten $x = 0$ en $x = \pi$ er ook bij nemen, maar we hebben ze al. Nu moeten we gewoon nog elk van de drie lokale extrema invullen in $b(t)$ om te vinden dat de minimale en maximale waarden van b gelijk zijn aan $-\pi$ en $\frac{\pi}{2}$.

b) De eerste stap is om de homogene vergelijking $y'(x) + y(x) = 0$ op te lossen. Dit levert

$$y(x) = ce^{-x}$$

Nu passen we de methode van de integrerende factor toe om te krijgen dat

$$y(x) = e^{-x}\int e^x G(x)dx = \frac{1}{2}e^{-x}\int e^x \sin 2x dx$$

Deze integraal staat in het formularium (partieel integreren met recurrentie zou waarschijnlijk ook lukken) dus we vullen in:

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-x}\left(\frac{e^x}{5}(\sin 2x - 2\cos 2x) + C\right) = \frac{1}{10}\sin 2x - \frac{1}{5}\cos 2x + Ce^{-x}$$

en we zijn klaar.

c) Dit is de moeilijkste vraag van het examen (vond ik). Het eerste inzicht is om de gemiddeldewaardestelling te gebruiken:

$$\exists c \in [a, b] : h'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a}$$

Nu moeten we enkel a en b juist kiezen. Aangezien we de waarde van f enkel weten in drie punten, hebben we niet echt veel keus. We berekenen eerst $h(x)$ voor elk van deze punten:

$$h(\frac{\pi}{12}) = \frac{\pi}{4}; h(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}\pi}{4}; h(\frac{7\pi}{12}) = \frac{-\pi}{4}$$

Vervolgens passen we de GW-stelling toe:

$$\exists c_1 : h'(c_1) = \frac{\frac{-\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}\pi}{4}}{\frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{3}} = -1 - \sqrt{3}$$

Dit is niet wat we wilden krijgen, maar als we de GW-stelling opnieuw toepassen op een ander interval krijgen we

$$\exists c_2 : h'(c_2) = \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}\pi}{4}}{\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} - 1$$

Nu kunnen we de tussenwaardestelling toepassen op de continue functie h', want aangezien $h'(c_1) < -\sqrt{3} < h'(c_2)$, moet er ergens tussen c_1 en c_2 een c liggen zodat $h'(c) = -\sqrt{3}$.