

Deelexamen 1

Een troep Coronaslaven

November 2020

Noot vooraf: Het eerste deelexamen van 2020 vond online plaats door de lockdown in november. Daarom zijn er meerdere versies van het examen waarvan je de meeste vragen hieronder kan vinden. Ook de quoterings was anders in vergelijking met andere jaren. De puntenverdeling en verwachte antwoorden waren als volgt:

- Voor de eerste vraag kreeg je 1 punt als je het juiste antwoord aanvinkte.
- Voor de tweede, derde en vierde vraag kreeg je één punt voor de juiste limiet of het juiste volume. Je moest geen tussenstappen indienen, dus je kreeg alles of niets.
- Voor de vijfde en zesde moest je een geschreven uitwerking indienen. De exacte puntenverdeling per tussenstap verschilt per versie van het examen, maar voor vraag 5 vielen er telkens 2 en voor vraag 6 4 punten te verdienen.
- Het totale examen stond dus op tien punten.

1 Versie 1

Vraag 1: meerkeuze. Beschouw de functie $h(x) = f(x)^{g(x)}$. Bereken het snijpunt van de raaklijn aan h in het punt $x = 2\pi$ met de y -as voor $f(x) = \ln x$ en $g(x) = \cos x$.

1. $y = \frac{1}{2\pi} - 1$
2. $y = \ln 2\pi - 1$
3. $y = \ln 2\pi + 4\pi^2$
4. $y = \ln 2\pi - 4\pi^2$

Vraag 2. Bereken de volgende limiet:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\csc x}{\ln x}$$

Vraag 3. Bepaal de oppervlakte van het gebied ingesloten door de kromme $|x - y| + |x + y| = \sqrt{5}$ en de hyperbool $4y^2 - 4x^2 = 1$. Typ hieronder enkel je einduitkomst afgerond tot op twee decimalen.

Vraag 4. Zoek het volume van het omwentelingslichaam verkregen door $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ te draaien rond de x -as.

Vraag 5. Stel dat isotoop A en isotoop B allebei radioactief vervallen naar isotoop C . Isotoop A heeft een halfwaardetijd van 8 uur. We beginnen met een mengsel van 50% A en 50% B . Na 4 uur bestaat het mengsel voor 50% uit isotoop C met de rest een ongekende verhouding van A en B . Welk

aandeel van isotoop C is er in het mengsel na 16 uur uitgedrukt in procenten tot op 1 cijfer na de komma.

Tip: Bij radioactief verval verandert een origineel isotoop in een ander isotoop en zal de hoeveelheid van het originele isotoop dus afnemen in de tijd. Radioactief verval van een isotoop verloopt evenredig met de hoeveelheid aanwezig van dit isotoop. De halfwaardetijd is de tijd waarop nog maar de helft van de originele hoeveelheid van het isotoop overblijft.

Vraag 6. Beschouw de rationale functie $r(x) = \frac{x^4+x^2-2}{x^2-16}$. Zij $H(x)$ de functie gegeven door volgende integraal $H(x) = \int_{-x}^x r(t)dt$ waarbij $x \in (-4, 4)$.

1. Bepaal alle nulpunten van $r(x)$ in het complexe vlak. Geef je berekeningen weer. (1 punt)
2. Is $H(x)$ een even en/of oneven functie? Beargumenteer. (0.5 punt)
3. Bepaal en classificeer alle lokale extrema van $H(x)$ op het open interval $(-4, 4)$. Geef je berekeningen weer (1.5 punten)
4. Zijn je gevonden lokale extrema ook globale extrema op het open interval $(-4, 4)$? Beargumenteer. (1 punt)

Eindoplossingen

- **Vraag 1:** b)
- **Vraag 2:** $-\infty$
- **Vraag 3:** 1, 51
- **Vraag 4:** $\frac{32\pi a^3}{105}$
- **Vraag 5:** $C(16) = 87,1\%$
 - Beginvoorwaarde: $A_0 = 50, B_0 = 50, C_0 = 0$ (0,25 punten)
 - Formule voor concentratie van C in functie van A en B (0,25 punten)
 - Exponentieel verval voor A en B . (0,25 punten)
 - Exponent van $A(t)$ bepalen: $k_1 = -(\ln 2)/8$ (0,25 punten)
 - $B(4) = 50(1 - 1/\sqrt{2})$ (0,25 punten)
 - Exponent van $B(t)$ bepalen: $k_2 = \ln(1 - 1/\sqrt{2})/4$
 - $C(16) = 87.1$ (0,5 punten)
- **Vraag 6:**
 1. $x = \pm 1, \pm \sqrt{2}i$
 2. $H(x)$ is oneven maar niet even.
 3. $H(x)$ bereikt een maximum voor $x = 1$ en een minimum voor $x = -1$. (0,75 per extremum)
 4. $H(x)$ heeft geen globale extrema door de verticale asymptoten $x = \pm 4$.

2 Versie 2

Vraag 1: meerkeuze. Beschouw de functie $h(x) = f(x)^{g(x)}$. Bereken het snijpunt van de raaklijn aan h in het punt $x = 3\pi/2$ met de y -as voor $f(x) = \ln x$ en $g(x) = \sin x$.

1. $y = \ln \frac{3\pi}{2} + \left(\frac{1}{\ln \frac{3\pi}{2}}\right)^2$

2. $y = \frac{1}{\ln \frac{3\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{\ln \frac{3\pi}{2}}\right)$

3. $y = 1 + \frac{1}{\ln \frac{3\pi}{2}}$

4. $y = \frac{1}{\ln \frac{3\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{\ln \frac{3\pi}{2}}\right)$

Vraag 2: meerkeuze. Beschouw de functie $f(x) = 3x - l \arctan x + \ln(x+1)$. Voor welke waarde van $k \in \mathbb{R}$ heeft $f(x)$ een lokaal minimum in $x = 1$?

1. $k = 7$

2. $k = -\frac{5}{11}$

3. $k = \frac{1}{2}$

4. $k = -3$

Vraag 3. Idem als versie 1.

Vraag 4. Zoek het volume van de ellipsoïde verkregen door de ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ te draaien rond de x -as. Typ hieronder enkel je einduitkomst.

Vraag 5. Idem als versie 1.

Vraag 6. Beschouw de rationale functie $q(x) = \frac{x^4+3x^2-4}{x^2-9}$. Zij F de functie gegeven door volgende integraal $F(x) = \int_{-x}^x q(t)dt$ waarbij $x \in (-3, 3)$.

1. Bepaal alle nulpunten van q in het complexe vlak. Geef je berekeningen weer.
2. Is F een even en/of oneven functie? Beargumenteer.
3. Bepaal en classificeer alle lokale extreme van F op het open interval $(-3, 3)$. Geef je berekeningen weer.
4. Zijn je gevonden lokale extrema ook globale extrema op het open interval $(-3, 3)$? Beargumenteer.

Eindoplossingen

- **Vraag 1:** b)
- **Vraag 2:** $k = 7$
- **Vraag 4:** $\frac{4}{3}\pi ab^2$
- **Vraag 6:**
 1. $q = \pm 1, \pm 2i$
 2. F is oneven maar niet even.

3. F heeft een lokaal minimum voor $x = -1$ en een lokaal maximum voor $x = 1$
4. F heeft geen globale extrema door de verticale asymptoten $x = \pm 4$

3 Versie 3

Vraag 1: Beschouw de functie $h(x) = f(x)^{g(x)}$. Bereken het snijpunt van de raaklijn aan h in het punt $x = 2\pi$ met de y -as voor $f(x) = \ln x$ en $g(x) = \cos x$

Vraag 2: geen meerkeuze. Bereken volgende limiet. Geef enkel je einduitkomst.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{1/x^2}$$

Vraag 3. Bepaal de oppervlakte ingesloten door de kromme $|2x| + |y| = 3$ en de hyperbool $\frac{y^2}{\sqrt{2}} - \frac{x^2}{\sqrt{2}} = 1$. Geef enkel je einduitkomst.

Vraag 4. Zoek de oppervlakte van het gebied tussen de curves $y^2 = 2x + 1$ en $x - y - 1 = 0$. Geef enkel je einduitkomst.

Vraag 5. Er staat initieel €1000 op een bankrekening met ongekende rentevoet. Na 2 jaar verdubbelt deze rentevoet. Na 4 jaar staat er €1200 op deze rekening. Hoeveel zou er op de rekening hebe gestaan als de rente nooit was verdubbeld? Druk je antwoord uit tot op 2 decimalen nauwkeurig. Ga er vanuit dat er geen geld werd overgemaakt op de rekening. Geef je volledige uitwerking en geef je berekeningen duidelijk weer. Tip: jaarlijks wordt het saldo op een bankrekening verhoogd evenredig met het huidige saldo. De rentevoet is het procent waarmee het saldo verhoogd wordt.

Vraag 6. Beschouw de rationale functie $r(x) = \frac{x^4 + 8x^2 - 9}{x^2 - 36}$. Zij $H(x)$ de functie gegeven door volgende integraal $H(x) = \int_{-x}^x r(t)dt$ waarbij $x \in (-6, 6)$.

1. Bepaal alle nulpunten van $r(x)$ in het complexe vlak. Geef je berekeningen weer. (1 punt)
2. Is $H(x)$ een even en/of oneven functie? Beargumenteer. (0.5 punt)
3. Bepaal en classificeer alle lokale extrema van $H(x)$ op het open interval $(-6, 6)$. Geef je berekeningen weer (1.5 punten)
4. Zijn je gevonden lokale extrema ook globale extrema op het open interval $(-6, 6)$? Beargumenteer. (1 punt)

4 Versie 4

Vraag 1 Beschouw de functie $h(x) = f(x)^{g(x)}$. Bereken het snijpunt van de raaklijn aan h in het punt $x = \pi$ met de y -as voor $f(x) = 2^x$ en $g(x) = \sin x$.

1. $y = 1 + \ln 2$
2. $y = 1 - \pi \ln 2$
3. $y = 1 - \pi^2$
4. $y = 1 + \pi^2 \ln 2$

Vraag 2 *idem als versie 1*

Vraag 3. *Bepaal de oppervlakte van het gebied ingesloten door de cirkel $x^2 + y^2 = 4$ en de rechthoekige hyperbool $xy = \frac{1}{2}$. Typ hieronder enkel je einduitkomst afgerond tot op twee decimalen.*

Vraag 4. *Bepaal de coördinaten van het zwaartepunt van de regio $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$, $\ln(\sin x) \leq y \leq 0$. Gelieve je antwoord te schrijven in de volgorde x -coördinaat, y -coördinaat. Typ hieronder enkel je einduitkomst.*

Vraag 5. *idem als versie 3*

Vraag 6. *idem als versie 1*

Eindoplossingen

- **Vraag 1:** d)
- **Vraag 3:** 3.21
- **Vraag 4:** $\bar{x} = 0.30239$, $\bar{y} = -0.93986$ of even goed $(0.30, 0.94)$