Calculus I, **20/11/2017**

Reeksnr.:
Naam:

1. a. Bepaal de oplossing van volgende differentiaalvergelijking

$$\frac{dy}{dx} = xy - x,$$

met beginvoorwaarde $y(0) = 2$.

In het vervolg beschouwen we de functie

$$f(x) = \frac{1 + e^{\frac{x^2}{2}}}{\ln(\sqrt{|x|})}.$$

b. Bepaal het domein van f. Is deze functie even of oneven? Argumenteer.

c. Voor welke punten $x \in \mathbb{R}$ is deze functie continu? Bepaal een continue uitbreiding in het punt $x = 0$ voor deze functie.

d. Is de continue uitbreiding ook afleidbaar in $x = 0$? Verklaar waarom wel of waarom niet.

e. Heeft de functie f verticale of horizontale asymptoten? Zo ja, bepaal deze asymptoten exact.

(5 ptn)

Antwoord:

a)

The differential equation can be solved either by separation of variables or by using integrating factors. In the first case, you can rewrite the differential equation as:

$$y' = x(y - 1) \tag{1}$$

A simple integration then gives:

$$\ln(|y - 1|) = \frac{x^2}{2} + \mathbf{C}$$
$$|y - 1| = e^{x^2/2+C}$$

Applying the initial condition, we find that:

$$|2 - 1| = e^C \to C = 0 \tag{2}$$

For $C = 0$, the solution is $|y-1| = e^{x^2/2}$ and since the right hand side is always positive, $|y-1| = y-1$:

$$y = 1 + e^{x^2/2} \tag{3}$$

Otherwise, you can use an integrating factor $\mu(x) = \int -xdx = -\frac{x^2}{2}$.

Points: In general, 0.7 points are given for the correct calculation of the general solution and 0.3 points for the initial condition. If you use separation of variables, you have to justify why $|y - 1| = y - 1$!

b)

To correctly give the domain, you have to identify which points are problematic for all parts of the function. The numerator of the fraction is defined for every x. The denominator however, is not. First, the logarithm is **not defined** for $x = 0$. Second, since we have the absolute value of x in the square root, negative values are allowed. Third, the denominator **can be zero** if $x = \pm 1$. In total we exclude from the domain the points $x = 0, \pm 1$, so

$$dom f = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} \tag{4}$$

Since $f(-x) = f(x)$, the function is even.

Points: For the correct domain, 0.7 points are given (0.3 if you exclude $x = 0$ and 0.4 for $x = \pm 1$) and 0.3 for the characterization of f as even.

c)

The function is continuous at every point of the domain, as a combination of continuous function. For a continuous extension, we demand

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

The limit is equal to zero (as the logarithm tends to infinity and the numerator to 2), so we define $f(0) = 0$. Thus,

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 0, \pm 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Points: A correct explanation for the continuous extension & calculation of the limit give 0.7 points (0.4 + 0.3) and 0.3 for the correct characterization of f as continuous in its domain.

d)

Using the definition of the derivative at $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h)}{h} \to \begin{cases} +\infty & h \to 0^- \\ -\infty & h \to 0^+ \end{cases} \tag{6}$$

so it is not differentiable at zero ($x = 0$ is a singular point).

Points: A correct calculation of $f'(0)$ and explanation are awarded with 1 point.

e)

There are no horizontal asymptotes of f as

$$\lim_{h \to \pm\infty} f(x) \to \infty$$

The vertical asymptotes of f are $x = \pm 1$, as

$$\lim_{h \to \pm 1} f(x) \to \infty$$

.

Since f is even, you only have to calculate one limit in each case.

Points: Every correct type of asymptotes gives 0.5 points (1pt in total).

Reeksnr.:
Naam:

Common mistakes:

- If you separate the variables, do not forget the integration constant.
- Justify why $|y-1| = y-1$. The solution is not a piecewise function, the initial condition is only satisfied for $y-1>0$.
- Be careful when you are required to give the domain of a function. Carefully check for **all** problematic points ! Always check if *all* parts are defined (e.g. the logarithm requires $x>0$) and than the denominator is *never* zero.
- Continuity of f at $x=0$ is a necessary but not sufficient condition for differentiability.
- The continuous extension of $f(x)$ gives $f(0)=0$, but this **does not** imply that $f'(0)=0$. Note the difference: $g'(x_o)$ means the *value* of g' at $x=x_o$ and **not** the derivative of $g(x_o)$ (which is naturally always zero).
- Do not use the L' Hospital rule when you are not allowed to. Forms of $\frac{a}{\infty}$ are properly defined and give 0 (e.g. the answer of question c).
- Be consistent in your solutions. Many of you did not exclude that $x=\pm 1$ from the domain, but later stated that vertical asymptotes are found where the denominator of f becomes zero...
- Do not confuse horizontal and vertical asymptotes
- The point $x=0$ is a singular point and thus there is *no* vertical asymptote.

2. Een stuk draad van 80 cm wordt in twee stukken geknipt. Een van de twee delen wordt in een gelijkzijdige driehoek gevouwen en het andere stuk wordt in een rechthoek gevouwen waarvan de lengte 4 keer groter is dan de breedte. Bepaal waar de draad precies moet geknipt worden opdat de oppervlakte van beide figuren samen maximaal is. Onderbouw je redenering grondig.

(2 ptn)

Antwoord:

If $L = 80cm$ is the total length of the rope, we use $x = 3a$ to create an equilateral triangle (of side a) and $L - x$ to create the rectangular. If the width of the rectangular is b then the length is $4b$. Since the perimeter of the rectangular is $10b$, we find that $b = \frac{L-x}{10}$.

The surface of each shape is:

$$S_{tr} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{x^2\sqrt{3}}{36}$$
$$S_r = 4b^2 = \frac{4(L-x)^2}{100}$$

We need to maximize the total surface:

$$S(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{36} + \frac{4(L-x)^2}{100} \tag{7}$$

The "standard" procedure requires to identify critical points of the function, where $S'(x_o) = 0$. This yields one critical point, $x_o = \frac{2880}{36+25\sqrt{3}}$.

Either by the second derivative test or by simply creating a table of $S(x), S'(x)$, this point is identified as minimum. This means that to find minima, we need to check the values of x at the endpoints of the domain of x, so $x = 0cm$ and $x = 80cm$. In other words, we need to use the rope to create one shape only.

Comparing $S(0)$ and $S(80)$, we find that $S(0) < S(80)$, so we have to use the whole length of the rope for the triangle.

An alternative (and faster) way to solve the problem, is to identify that $S(x)$ represents a parabola, so maxima are found in the endpoints of the domain.

Points: The definition of $S(x)$, the first derivative and calculation of the critical point give 1 point. The correct characterization of the critical point as a minimum gives 0.5pt and finding the correct maximum at 0.5pt.

Common mistakes:

- Various errors in geometry
- To find minima/maxima, we usually search for critical points. This does not automatically characterize them as the required minimum/maximum. Use the second derivative test or create a table for f, f' to correctly characterize the critical point
- In case that the critical point is not the required extreme value, look for alternative points: endpoints of the domain are the other candidates ! (**A similar exercise was solved during the afternoon sessions**)

3. Beschouw volgende bepaalde integraal

$$I_n = \int_1^e \ln^n(x)dx,$$

waarbij $n \in \mathbb{N}_0 = \{1, 2, 3, \dots\}$.

a. Bereken I_1.

b. Toon aan dat $I_{n+1} + (n+1)I_n = e$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.

c. Gebruik vorige deelvragen om I_4 expliciet te bepalen.

d. Algemeen geldt dat $I_n = f(n) + g(n) \cdot e$ waarbij f en g functies zijn in de veranderlijke n en onafhankelijk zijn van het getal e. Bepaal $f(n)$ expliciet en bewijs je antwoord. *(3 ptn)*

Antwoord:

a. Door middel van partiële integratie (of formule uit het formularium) vinden we dat

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^e \ln x dx \\ &= (x \ln x)\,|_1^e - \int_1^e 1dx \\ &= 1. \end{aligned}$$

Puntenverdeling Enkel bij volledig juist antwoord 0.5 punten.

b. Neem $n \in \mathbb{N}_0$. Door middel van partiële integratie (of combinatie van formules uit het formularium) vinden we dat

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e \ln^{n+1}(x)dx \\ &= \left(x \ln^{n+1}(x)\right)|_1^e - (n+1)\int_1^e \ln^n(x)dx \\ &= e - (n+1)I_n. \end{aligned}$$

Indien we dit herschrijven vinden we de gevraagde gelijkheid.

Puntenverdeling Berekening 0.5 punten en structuur van je antwoord 0.5 punten.

c. Indien we meermaals de gelijkheid uit b. toepassen vinden we dat

$$\begin{aligned} I_4 &= e - 4I_3 \\ &= e - 4(e - 3I_2) \\ &= e - 4(e - 3(e - 2I_1)) \end{aligned}$$

Gebruiken we nu a., dan is

$$I_4 = e - 4(e - 3(e - 2)) = 9e - 24.$$

Puntenverdeling Enkel bij volledig juist antwoord 0.5 punten. Indien er bij a. een fout antwoord was, dan werd er in deze vraag rekening mee gehouden.

d. Via c. gokken we dat $f(n) = (-1)^{n+1}n!$. We bewijzen dit met volledige inductie. Voor $n = 1$ vinden we dat $f(1) = 1$ wat overeenkomt met wat we vonden in de eerste deelvraag. Stel $n > 1$ en neem aan dat het geldt voor $k \leq n$. Uit b. vinden we dat

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= f(n+1) + g(n+1) \cdot e \\ &= e - (n+1)(f(n) + g(n) \cdot e). \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$f(n+1) = -(n+1)f(n).$$

Uit de inductiehypothese volgt dan

$$f(n+1) = (-1)^{n+2}(n+1)!$$

zodat het resultaat volgt wegens het principe van volledige inductie.

Puntenverdeling 0.5 punten voor het bepalen van $f(n)$ en 0.5 punten voor het aantonen van de claim over $f(n)$. Indien er bij a. een fout antwoord was, dan werd er in deze vraag rekening mee gehouden.

Veelgemaakte fouten

- $\ln(1) = 0$.
- Voor vraag b. was het niet nodig om met inductie te werken.
- Rekenfouten bij de berekening van de derde deelvraag.
- $f(n)$ moest onafhankelijk van e zijn.