

Calculus deexamen 2

bachelor wiskunde, fysica en TWIN

6 januari 2025

Vraag 1 (3 pt)

De champagneglazen van tante Sidonia zijn zo gevormd dat het volume champagne gegeven wordt door

$$V(h, a) = \pi \frac{h^2}{2a}$$

als het glas tot hoogte h gevuld is. Hierbij is de parameter $a \in \mathbb{R}_0^+$ per glas een beetje anders. Het glas van Wiske heeft $a = 1$ en is gevuld tot een hoogte $h = 5$ cm. Suskes glas heeft $a = 0.98$ en is slechts gevuld tot $h = 4.9$ cm. Volgens Suske zit er minder champagne in zijn glas dan bij Wiske.

- (a) Bereken de differentiaal dV voor algemene h en a .
- (b) Gebruik de algemene uitdrukking voor dV uit vraag (a) om het volume in Suskes glas te benaderen vanuit het volume in Wiskes glas.
- (c) Als de lineaire benadering uit (b) voor Suske exact zou zijn, wie heeft er dan meer champagne? Hoeveel is het verschil tussen de lineaire benadering voor Suskes glasinhoud en zijn echte volume?

Vraag 2 (3 pt)

Een slee glijdt vanuit stilstand in het punt $(1, 1)$ naar beneden van een berg met als vergelijking

$$z = e^{-x^2} + y(\sin(\pi y) + 1)$$

- (a) De slee begint te glijden in de richting waarin de berg het steilst daalt. Bepaal deze richting.
- (b) Een kind zit op de slee en zijn lichaam is georiënteerd volgens de positieve normaalvector op de berg. Geef deze vector.
- (c) Hoe snel neemt de hoogte van de slee toe als ze voortgetrokken wordt in de richting $\vec{v} = (-2, -1)$?

Vraag 3 (4 pt)

Bewijs dat de volgende reeks convergeert en vind de waarde s waarnaar deze convergeert:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{-2n+1}}{3^{n-2}}$$

Vraag 4 (5 pt)

Een kromme is als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned}x(t) &= a \cos(kt) \cos(t) \\ y(t) &= a \cos(kt) \sin(t)\end{aligned}$$

met $k \in \mathbb{N}$ en $a, t \in \mathbb{R}$.

- (a) Schrijf de overeenkomstige polaire vergelijking en schets de kromme voor $k = 2$.
- (b) Vind de raaklijn aan de kromme bij $t = \frac{\pi}{3}$ voor $k = 2$.
- (c) Bereken de snelheidsvector bij $t = \frac{\pi}{4}$ en $k = 2$, en teken deze in het xy -vlak, waarbij $a = 1$ wordt aangenomen.

Vraag 5 (5 pt)

Vind de maximum- en minimumwaarden van $f(x, y, z) = y^2 - 10z$ op het oppervlak van de bol met straal 6 en middelpunt in de oorsprong, of met andere woorden, onder de voorwaarde $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.