Oplossing 1de deelexamen Calculus II van 29/2/2012

March 6, 2012

1 Vraag 1

Beschouw de volgende kromme in $\mathbb{R}^3$, geparametriseerd als

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2t-1)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}.$$

(a) Als de parameter t een tijd aangeeft, bereken dan de vectoriële snelheid $\mathbf{v}(t)$, de grootte van de snelheid, en de vectoriële versnelling $\mathbf{a}$.

(b) Bepaal de vergelijking van een vlak dat de kromme bevat. Via de normaal op dat vlak geef je vervolgens de uitdrukking van de eenheidsbinormaalvector $\hat{\mathbf{B}}$ voor die kromme in een willekeurig punt (opmerking: kies de richting van de normaal zodat zijn x-component positief is).

(c) Bereken de eenheidsraakvector $\hat{\mathbf{T}}$ voor de kromme, en dit in een willekeurig punt bij parameterwaarde t. Gebruik je resultaat voor de eenheidsbinormaalvector om nu ook de eenheidsnormaalvector $\hat{\mathbf{N}}$ uit te rekenen in dit willekeurig punt.

(d) Bereken de relatie $s(t)$ tussen de booglengteparameter s en de parameter t. Reken dit door tot je een formule hebt die hun verband via mogelijks transcendente functies uitdrukt (maar je hoeft je resultaat niet te inverteren tot $t(s)$).

Antwoord:

(a) Om dat t de tijd weergeeft, hebben we

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(t) &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k} \\
v(t) &= \sqrt{1+4+4t^2} = \sqrt{5+4t^2} \\
\mathbf{a}(t) &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}(t)}{\mathrm{d}t} = 2\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

(b) Je kan de parametervoorstelling van de kromme ook schrijven als

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t - 1 \\ z(t) = t^2. \end{cases}$$

Je ziet dan onmiddellijk dat elk punt op de kromme voldoet aan de vergelijking $y - 2x + 1 = 0$ en dit is de vergelijking van een vlak. Een normaalvector op dit vlak lees je af uit de coëfficienten van x, y en z in deze vergelijking dus

$$\mathbf{n} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j},$$

waarbij we ervoor zorgden dat de x-component positief is. Om de eenheidsbinormaalvector te vinden, moeten we $\mathbf{n}$ nog normeren. Dus

$$\hat{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\mathbf{i} - \mathbf{j}).$$

(c) De eenheidsraakvector is gegeven door

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)} = \frac{1}{\sqrt{5 + 4t^2}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}).$$

De eenheidsnormaalvector vinden we dan als

$$\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{T}} = \frac{1}{\sqrt{25 + 20t^2}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2t \end{vmatrix} = \frac{-2t\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} + 5\mathbf{k}}{\sqrt{25 + 20t^2}}.$$

(d) De booglengte $s(t)$ is gegeven door

$$s(t) = \int_a^t v(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_a^t \sqrt{5 + 4\tau^2}\,\mathrm{d}\tau.$$

De precieze waarde van a is van geen belang, want duidt enkel aan vanaf waar op de kromme je de lengte begint te meten. We nemen hierna $a = 0$. Deze integraal kan je uitwerken met behulp van een formule op de achterflap van het handboek. Je vindt dan

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \sqrt{5 + 4\tau^2}\,\mathrm{d}\tau \qquad u := 2\tau, \quad \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2t} \sqrt{5 + u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{u}{2}\sqrt{5 + u^2} + \frac{5}{2}\ln|u + \sqrt{5 + u^2}|\right]_0^{2t} \\ &= \frac{t}{2}\sqrt{5 + 4t^2} + \frac{5}{4}\ln|2t + \sqrt{5 + 4t^2}| - \frac{5}{4}\ln\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Opmerkingen:

- Bij vraag (b) wordt er gevraagd om een vlak te bepalen waartoe de kromme behoort. Om te beginnen is het natuurlijk van belang dat je antwoord de vergelijking van een vlak is, dus van de vorm $Ax + By + Cz = D$ met $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$. Veel studenten antwoorden met een kwadratische vergelijking in x, y, z. Dit is een kegelsnede en geen vlak. Je kon het vlak vinden zoals hierboven in de oplossing beschreven staat. Een alternatieve methode (die weliswaar wat meer tijd vergt) bestaat erin om drie punten op de kromme te kiezen en het vlak op te stellen dat deze punten bevat. Dit kan je doen door twee richtingsvectoren te berekenen en dan de normaal op het vlak te vinden als het kruisproduct van deze richtingsvectoren.

- Vereenvoudigen is sterk aanbevolen. Als je voor het vlak de vergelijking $4x - 2y - 2 = 0$ vindt, is dat juist, maar zeg nu zelf, de vereenvoudigde versie $2x - y - 1$ is beter.

- In (c) wordt er gevraagd de eenheidsraakvector $\hat{\mathbf{T}}$ in een willekeurig punt te berekenen. Veel studenten kiezen hier zelf een expliciete waarde voor t, bv. $t = 1$, en rekenen daarmee verder. Dat is niet willekeurig, maar specifiek. Je moest hier gewoon t laten staan, zodat je een antwoord vindt voor eender welke waarde van t en niet enkel voor een specifieke.

- Een alternatieve methode om de integraal uit (d) te berekenen (zonder substitutie) is de volgende

$$\begin{aligned}
s(t) &= \int_0^t \sqrt{5 + 4\tau^2}\,\mathrm{d}\tau \\
&= 2\int_0^t \sqrt{\tfrac{5}{4} + \tau^2}\,\mathrm{d}\tau \\
&= 2\left[\frac{\tau}{2}\sqrt{\tfrac{5}{4} + \tau^2} + \frac{5}{8}\ln|\tau + \sqrt{\tfrac{5}{4} + \tau^2}|\right]_0^t \\
&= t\sqrt{\tfrac{5}{4} + t^2} + \frac{5}{4}\ln|t + \sqrt{\tfrac{5}{4} + t^2}| - \frac{5}{4}\ln\sqrt{\tfrac{5}{4}}.
\end{aligned}$$

  Je maakt hierbij ook gebruik van de formule op de achterflap. Opvallend is dat slechts drie studenten deze vraag foutloos beantwoorden. Bij de methode met substitutie wordt meestal de voorfactor $\frac{1}{2}$ vergeten. Ook bij de tweede methode zit de fout meestal in de voorfactor 2.

2 Vraag 2

Gegeven de functie van drie veranderlijken $E(S, V, N)$ via de formule

$$E = \frac{3h^2 N}{4\pi m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} e^{\left(\frac{2S}{3Nk} - \frac{5}{3}\right)}$$

waarbij h, m, k gekende (natuurkundige) constanten zijn. Introduceer de temperatuur via $T = \frac{\partial E}{\partial S}$ en de druk via $p = -\frac{\partial E}{\partial V}$;

(a) Toon aan dat $p(N, T, V) = kNT/V$.

(b) In de driedimensionale (N, T, V)-ruimte, bereken ∇p.

(c) Bereken de directionele afgeleide van p in de richting bepaald door een richtvector van de rechte die de doorsnede is van de twee vlakken $V = 0$ en $N = T$.

(d) Beschouw het niveauoppervlak $p = k$. Bereken het raakvlak aan dit niveauoppervlak in het punt $(1, 1, 1)$.

Antwoord:

(a) Het berekenen van twee partieel afgeleiden geeft ons

$$p = -\frac{\partial E}{\partial V} = \frac{h^2}{2\pi m}\left(\frac{N}{V}\right)^{5/3} e^{\left(\frac{2S}{3Nk} - \frac{5}{3}\right)},$$
$$T = \frac{\partial E}{\partial S} = \frac{h^2}{2\pi mk}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} e^{\left(\frac{2S}{3Nk} - \frac{5}{3}\right)}.$$

Uit deze formules volgt onmiddellijk dat

$$\frac{kNT}{V} = p.$$

(b) We berekenen de gradiënt van

$$p(N, T, V) = \frac{kNT}{V}.$$

Dit is

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial N}\mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial T}\mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial V}\mathbf{k} = \frac{kT}{V}\mathbf{i} + \frac{kN}{V}\mathbf{j} - \frac{kNT}{V^2}\mathbf{k}.$$

(c) We zoeken eerst de richtvector $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$. Omdat $\mathbf{u}$ tot het vlak $V = 0$ behoort is $u_3 = 0$. Omdat $\mathbf{u}$ tot het vlak $N = T$ behoort, is $u_2 = u_3$. We vinden dus $\mathbf{u} = u(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ voor een $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. De eenheidsvectoren in deze richting zijn dan

$$\widehat{\mathbf{u}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j}).$$

Het maakt voor deze vraag niet uit welk teken je kiest. De directionele afgeleide in de richting van $\widehat{\mathbf{u}}$ is dan

$$D_{\hat{u}}p = \widehat{\mathbf{u}} \cdot \nabla p = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot \left(\frac{kT}{V}\mathbf{i} + \frac{kN}{V}\mathbf{j} - \frac{kNT}{V^2}\mathbf{k}\right) = \pm\frac{k(T + N)}{\sqrt{2}V}.$$

(d) Een eerste manier om dit te doen gaat als volgt. Het niveauoppervlak $p(N,T,V) = k$ wordt gegeven door de vergelijking $V = NT$. Dit is een oppervlak in de driedimensionale ruimte en hieraan moeten we het raakvlak vinden in het punt $(1,1,1) = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$. De partieel afgeleiden van $V(N,T) = NT$ zijn

$$V_1(N,T) = T, \qquad V_2(N,T) = N.$$

Geëvalueerd in het punt $(N,T) = (1,1)$ wordt dit

$$V_1(1,1) = 1, \qquad V_2(1,1) = 1.$$

Het raakvlak aan de grafiek van deze functie wordt dan gegeven door (zie HB p685)

$$V = V(1,1) + V_1(1,1)(N-1) + V_2(1,1)(T-1).$$

Ingevuld wordt dit

$$V = N + T - 1.$$

Een tweede manier gaat als volgt. We gebruiken hier niet de expliciete vergelijking van het niveauoppervlak, maar werken in het domein $\mathbb{R}^3$ van de functie $p(N,T,V) = kNT/V$. Het gezochte vlak heeft $\nabla p(1,1,1) = (1,1,-1)$ als normaal en gaat door het punt $(1,1,1)$. Het vlak wordt dus gegeven door de vergelijking

$$1(N-1) + 1(T-1) - 1(V-1) = 0.$$

Of vereenvoudigd,

$$N + T - V - 1 = 0.$$

Voor een soortgelijke redenering zie HB p721 example 6b.

Opmerkingen:

- Voor vragen (b), (c) en (d) was het de bedoeling dat je vertrok van wat je in (a) bewezen had.
- De richtvector voor een richtingsafgeleide moet genormaliseerd zijn (d.w.z. norm 1 hebben). Je berekent dan de richtingsafgeleide als het inproduct van deze eenheidsvector met de gradiënt en bekomt dus een reëel getal als uitkomst (hier in functie van N,T,V), maar geen vector.