Vraag 1. */2*

$\boldsymbol{r} = cos(2t)\boldsymbol{i} - sin(2t)\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}$

a) Zoek de hoek tussen de positie- en snelheidsvector bij $t = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}$

b) De versnelling $\boldsymbol{a}$ *kan geschreven worden als de som van de tangentiële en de normale component* $\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{T} + v^2 k\boldsymbol{N}$. *Vind deze in functie van t(niet voor* $t = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}$*).*

Vraag 2. */2*

$$\iint_M [(x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}} + \frac{\pi^2}{6}y + 3]\,\mathrm{d}A \ \textit{met}$$

$M = \{(x,y)\epsilon\mathbb{R} \mid x^2+y^2 \leq 1 \ en \mid x \mid + \mid y \mid \geq 1\}$

a) Schets de oppervlakte M

b) Bereken de integraal

Vraag 3. */2*
Bepaal het volume waarvan het gebied volledig boven de sfeer $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ *en binnen de paraboloïde* $z = 4 - x^2 - y^2$ *ligt.*
hint: cilindrische coördinaten

Antwoorden:

1)a) $\frac{\pi}{4}$

1)b) $0\mathbf{T} + 4\mathbf{N}$

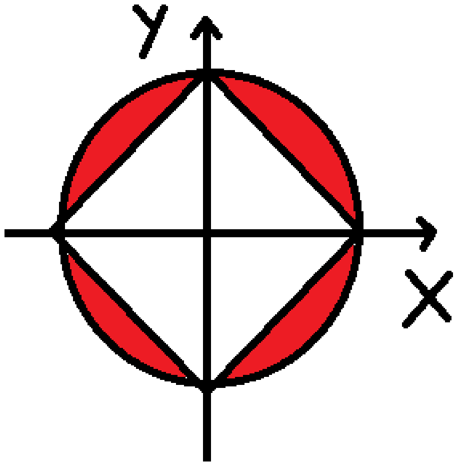
2)b) $\pi + 2$

3) $\frac{2\pi}{3}(17 - 6^{\frac{3}{2}})$

Antwoord 1. ***a)*** $\boldsymbol{v} = -2\sin(2t)\boldsymbol{i} - 2\cos(2t)\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$
Met behulp van het inproduct weten we dat $\cos(\theta) = \frac{r \cdot v}{\|r\|\|v\|}$
$\| \ r \ \| = \sqrt{\cos^2(2t) + \sin^2(2t) + 16t^2}$ *en* $\| \ v \ \| = \sqrt{4\sin^2(2t) + 4\cos^2(2t) + 16}$
Als we dit invullen krijgen we $\cos(\theta) = \frac{-2\cos(2t)\sin(2t)+2\sin(2t)\cos(2t)+16t}{\sqrt{\cos^2(2t)+\sin^2(2t)+16t^2}\sqrt{4\sin^2(2t)+4\cos^2(2t)+16}}$
$= \frac{16t}{\sqrt{1+16t^2}\sqrt{20}}$
Als we dan $t = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}$ *invullen bekomen we* $\frac{4\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}{\sqrt{(1+\frac{5}{3})20}}$
Dit vereenvoudigd zich tot $\frac{4}{\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$*. Dus* $\theta = \frac{\pi}{4}$*.*

b) *We weten al dat* $\| \ v \ \| = \sqrt{20}$ *dus* $\frac{dv}{dt} = 0$*. Dan heeft* $\boldsymbol{a}$ *enkel een normale component* v^2k*. We zouden deze kunnen berekenen maar het kan met minder rekenwerk door te gebruiken dat de tangentiële component 0 is. We kunnen* $\boldsymbol{v}$ *afleiden dan krijgen we* $\boldsymbol{a} = -4\cos(2t)\boldsymbol{i} + 4\sin(2t)\boldsymbol{j} = 4(-\cos(2t)\boldsymbol{i} + \sin(2t)\boldsymbol{j})$*. De norm van* $-\cos(2t)\boldsymbol{i} + \sin(2t)\boldsymbol{j} = 1$ *en omdat we weten dat* $\boldsymbol{a}$ *geen tangentiële component heeft kunnen we zeggend dat* $-\cos(2t)\boldsymbol{i} + \sin(2t)\boldsymbol{j} = \boldsymbol{N}$ *Dus we zien dat de ontbinding in een tangentiële en normale component van* $\boldsymbol{a}$ *onafhankelijk is van* t *en* $\boldsymbol{a} = 0\boldsymbol{T} + 4\boldsymbol{N}$*.*

Antwoord 2. ***a)***



b) *We kunnen deze integraal opsplitsen in 3 delen* $\iint_M (x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}\,\mathrm{d}A + \iint_M \frac{\pi^2}{6} y\,\mathrm{d}A + \iint_M 3\,\mathrm{d}A$.

Voor de eerste integraal zien we dat zowel x als y in het kwadraat staat. Het teken heeft dus geen belang, dan kunnen we de symmetrie gebruiken door over de oppervlakte in het eerste kwadrant te integreren en dan maal 4 te doen.

Dan krijgen we $4\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}\,\mathrm{d}y$.

We lossen deze op met behulp van poolcoordinaten. $0 \leqslant \frac{\pi}{2}$ *en de ondergrens voor straal ligt op de rechte* $y = 1-x$ *dus* $r\sin(\theta) = 1 - r\cos(\theta)$ *dan is* $r = \frac{1}{\sin(\theta)+\cos(\theta)}$. $\frac{1}{\sin(\theta)+\cos(\theta)} \leqslant r \leqslant 1$ *en* $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$. *Dan krijgen we* $4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\sin(\theta)+\cos(\theta)}}^1 r(r^2)^{\frac{-3}{2}}\,\mathrm{d}r = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{1}{\sin(\theta)+\cos(\theta)}}^1 \frac{1}{r^2}\,\mathrm{d}r = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(\theta) + \cos(\theta) - 1)\mathrm{d}\theta = 8 - 2\pi$.

Voor $\iint_M \frac{\pi^2}{6} y\,\mathrm{d}A$ *zien we dat deze onafhankelijk is van x en een oneven functie in y, op de schets zien we dan dat er evenveel oppervlakte boven en onder de x-as is, dus deze integraal zal 0 zijn.*

De derde integraal $\iint_M 3\,\mathrm{d}A$ *is onafhankelijk van x en y dus kunnen we weer 4 keer over de oppervlakte in het eerste kwadrant integreren. Maar omdat dit een constante functie is is het makkelijker om het volume te berekenen van het voorwerp met ons grondoppervlak als figuur en hoogte 3. Het grondoppervlak is 1/4 van een cirkel min de driehoek. Dus dit wordt* $4 \times 3 \times (\frac{\frac{\pi}{2}}{2} \times 1^2 - \frac{1\times 1}{2}) = 3\pi - 6$.

dan tellen we onze 3 uitkomsten op en verkrijgen we ons antwoord $\iint_M (x^2+y^2)^{\frac{-3}{2}}\,\mathrm{d}A + \iint_M \frac{\pi^2}{6} y\,\mathrm{d}A + \iint_M 3\,\mathrm{d}A = 8 - 2\pi + 0 + 3\pi - 6 = \pi + 2$

Antwoord 3. *We gaan dit volume berekenen met de driedubbele integraal* $\iiint_V \mathrm{d}V$. *We lossen deze op met cilindrische coordinaten, dus* $\mathrm{d}V = \mathrm{r}\mathrm{d}\mathrm{r}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$.
$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. *Voor r weten we dat de ondergrens 0 is bij de top van de paraboloïde. Voor de bovengrens moeten we de grootste cirkel vinden, dit is wanneer de sfeer en de paraboloïde elkaar snijden.*
Eerst zoeken we de hoogte waarop ze elkaar snijden, daarvoor vormen we de vergelijking van de sfeer om naar $z^2 = 6 - x^2 - y^2$. *Hierin vullen we de vergelijking van de paraboloïde in zodat* $z^2 = 2 + z$. *Deze vergelijking heeft 2 oplossingen* $z = 2$ *en* $z = -1$ *en aangezien we het volume boven de sfeer nodig hebben moeten we het bovenste snijpunt nemen, dus* $z = 2$. *Als we dit in 1 van de vergelijkingen in vullen hebben we een cirkel op hoogte z, evenwijdig met het xy-vlak met vergelijking* $x^2 + y^2 = 2$, *dus de bovengrens voor de straal* $r = \sqrt{2}$. $0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}$.
Voor z kunnen we dan de vergelijkingen van de sfeer en de paraboloïde omvormen met $x^2+y^2 = r$ *naar z. De ondergrens op de sfeer wordt dan* $z = \sqrt{6 - r^2}$ *en de bovengrens op de paraboloïde* $z = 4 - r^2$ *zodat* $\sqrt{6 - r^2} \leqslant z \leqslant 4 - r^2$.
Dan moeten we de volgende driedubbele integraal oplossen: $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{r}\mathrm{d}\mathrm{r} \int_{\sqrt{6-r^2}}^{4-r^2} \mathrm{d}z$.
Deze geeft ons het antwoord $V = \frac{2}{3}\pi(17 - 6^{\frac{3}{2}})$.