Vraag 1

Beschouw het vectorveld $\mathbf{F} = (\sin(x^2), e^{y^2} + x^2, z^4 + 2x^2)$

a) Toon aan dat dit vectorveld niet conservatief is.

b) Zij C een willekeurige gladde geslote kromme, gelegen in het vlak $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z = d$ met $d \in$ R. Toon aan dat $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$.

Vraag 2

Zij $R \geq 0$. Beschouw het vectorveld $\mathbf{F} = (x, -Ry, z)$ en een cilinder met mantel-oppervlak $\{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3 | 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 = R^2\}$

a) Bepaal de *totale* flux van $\mathbf{F}$ doorheen de rand van de volledige cilinder, waarbij de normaal naar buiten wijst.

b) Bepaal R zodat de flux van $\mathbf{F}$ doorheen het *manteloppervlak* met naar buitenwijzende normaal, maximaal is.

Vraag 3

Zij $\alpha \in \mathrm{R}$ en $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Beschouw het gravitatieveld $\mathbf{G} = \alpha \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ in het domein $D = \{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3 | (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$

a) Toon aan dat $\mathbf{G}$ irrotationaal is in D.

b) Beargumenteer dat $\mathbf{G}$ conservatief is in D.

c) Zij ϕ een (scalaire) potentiaal voor $\mathbf{G}$ in D. Toon aan dat $\nabla^2 \phi = 0$.

Oplossing 1

a) Een nodige voorwaarde voor een conservatief vectorveld is dat $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$ en $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x$ dus $\mathbf{F}$ kan niet conservatief zijn.

b) Volgens stokes theorem is $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \mathrm{d}S$.
Met S het ingesloten oppervlak door de kromme C.
$\nabla \times \mathbf{F} = (0-0)\mathbf{i} + (0-4x)\mathbf{j} + (2x-0)\mathbf{k}$
$\mathbf{N} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{4}+1}}.(\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \frac{6}{7}(\frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k})$
$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} = \frac{6}{7}(0 - 2x + 2x) = 0$. Dus $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S 0 \mathrm{d}S = 0$.

Oplossing 2

a) Een cilinder is een gesloten oppervlak dus weten we via het 3D divergentietheorema dat de flux $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\mathrm{d}S = \iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\mathrm{d}V$ met S het oppervlak van de cilinder en V het omsloten volume van de cilinder.
Uit het gegeven halen we dat deze cilinder een straal heeft van R en $0 \leq z \leq 1$. En $\nabla\cdot\mathbf{F} = 2 - R$
Dan $\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^1 r\mathrm{d}r(2-R) = \pi(2R^2 - R^3)$

b) Nu hebben we enkel nog maar de flux door de mantel van de cilinder nodig dus berekenen we eerst de flux door het onder- en bovenvlak en trekken we deze af van de totale flux.
De flux door een oppervlak is $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{N}\mathrm{d}S$.
De normaal is naar buitenwijzend dus voor het ondervlak is
$\mathbf{N} = -\mathbf{k}$. Dan is de flux door het ondervlak
$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\mathrm{d}r(x\mathbf{i} - Ry\mathbf{j} + z\mathbf{k})\cdot(-\mathbf{k}) = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\mathrm{d}r(-z)$.
En aangezien voor het ondervlak $z = 0$ is $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\mathrm{d}r(0) = 0$. Voor het bovenvlak krijgen we analoog met $\mathbf{N} = \mathbf{k}$ en $z = 1$ dat de flux door het bovenvlak gelijk is aan $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\mathrm{d}r(1) = \pi R^2$. Dan is de flux door de mantel $\pi(2R^2 - R^3) - 0 - \pi R^2 = \pi(R^2 - R^3)$.
Nu moeten we nog berekenen voor welke waar de van $R \geqslant 0$ deze het grootst is dus aangezien π maar een factor is leiden we $R^2 - R^3$ af en krijgen we $2R - 3R^2$. De nulpunten van de afgeleide en de extrema van ons voorschrift zijn dus in $R = 0, \frac{2}{3}$.
Dan kunnen we een tekentabel van de afgeleide maken en zien we dat $\pi(R^2 - R^3)$ stijgt van 0 tot $\frac{2}{3}$ en daarna weer daalt, dus $R = \frac{2}{3}$ is het gezochte maximum.

Oplossing 3

$\mathbf{G} = \alpha \frac{\mathbf{r}}{||\mathbf{r}||} = \frac{\alpha}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$.

a) Irrotationeel betekent $\nabla \times \mathbf{G} = \vec{0}$.
We berekenen $\nabla \times \mathbf{G}$ voor de $\mathbf{i}$ component, de $\mathbf{j}$ en $\mathbf{k}$ volgen analoog.
$\frac{z \cdot \partial (x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}}{\partial y} - \frac{y \cdot \partial (x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}}{\partial z}$
$= \frac{-3}{2} z \cdot 2y \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-5}{2}} - \frac{-3}{2} y \cdot 2z \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{-5}{2}} = 0.$

b) Er is een eigenschap die zegt dat als $\nabla \times \mathbf{G} = \vec{0}$ en het domein van $\mathbf{G}$ glad (smooth) is, dan is $\mathbf{G}$ een conservatief vectorveld. $\mathbf{G}$ is enkel niet glad in $x, y, z = 0$ maar dit behoort niet tot het gespecificeerde domein dus is het domein inderdaad glad en is $\mathbf{G}$ een conservatief vectorveld.

c) $\nabla \phi = \mathbf{G}$ dus $\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \mathbf{G} = \nabla \cdot \mathbf{G} =$
$\alpha((\frac{\partial (x \cdot (x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}})}{\partial x}) + (\frac{\partial (y \cdot (x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}})}{\partial y}) + (\frac{\partial (z \cdot (x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}})}{\partial z})) =$
$\frac{\alpha}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}((x^2+y^2+z^2-3x^2)+(x^2+y^2+z^2-3y^2)+(x^2+y^2+z^2-3z^2))$
$= 0$