

Calculus I: Januari examen model oplossing

1 Hyperbolische paraboloïde

1.1 Opwarmer

De rand van het domein kan herschreven worden als

$$\frac{x^2}{q^2} + \frac{y^2}{2q^2} = 1. \quad (1)$$

Hier zien we dat de halve korte as gelijk is aan q en de halve lange as gelijk aan $\sqrt{2}q$. Dan past deze ellips in een cilinder met straal $r = 2$ als $2 \geq \sqrt{2}q$, en dus volgt dat $q \leq \sqrt{2}$.

De maximale waarde van y wordt bekomen wanneer $x = 0$ en $y = 2$. Merk op dat deze keuze z maximaliseert want dit maximaliseert de positieve bijdrage $y^2/4$ ($= 1$) en minimaliseert de negatieve bijdrage x^2/a^2 ($= 0$) aan z . Analoog wordt de maximale waarde van x bereikt wanneer $x = \sqrt{2}$ en $y = 0$. Dit minimaliseert z want dit minimaliseert de positieve bijdrage $y^2/4$ ($= 0$) en maximaliseert de negatieve bijdrage x^2/a^2 ($= 2/a^2$) aan z . Het verschil tussen de grootste en kleinste z waarde is dus

$$\Delta z = 1 - \left(-\frac{2}{a^2}\right). \quad (2)$$

Wanneer we dit gelijkstellen aan 2, vinden we dat $a = \sqrt{2}$.

1.2 Kruiding

De kruiden oppervlakte dichtheid is het product van de kruiden-inval en eenheid-normaalvector van de chip. De kruiden inval $\mathbf{p}$ is uniform langs z met grote k en is dus:

$$\mathbf{p} = k\mathbf{k} \quad (3)$$

Voor de oppervlakte normaal $\mathbf{n}$ geldt:

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f_1(x, y)\mathbf{i} + f_2(x, y)\mathbf{j} - \mathbf{k}. \quad (4)$$

De eenheid-oppervlakte normaal is dan:

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}. \quad (5)$$

Dit berekenen voor de chip vorm geeft:

$$\hat{\mathbf{n}}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4} + 1}} \left(\frac{2x}{2} \mathbf{i} + \frac{2y}{4} \mathbf{j} - \mathbf{k} \right). \quad (6)$$

Nu berekenen we het dot-product om de oppervlakte dichtheid $D(x, y)$ te vinden:

$$D(x, y) = \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{n}}(x, y) = \frac{k}{\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4} + 1}} \quad (7)$$

1.3 Nieuw domein

We onderzoeken de extrema van de oppervlakte

$$z = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} \equiv f(x, y) \quad (8)$$

langsheen de curve

$$0 = x^2 + y^4 - by^2 - 1 \equiv g(x, y) \quad (9)$$

Hiertoe definiëren we de Lagrange functie met één Lagrange multiplicator λ ,

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \quad (10)$$

$$= \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{2} + \lambda (x^2 + y^4 - by^2 - 1). \quad (11)$$

De lokale extrema van $f(x, y)$ langsheen de curve $g(x, y) = 0$ voldoen dan aan het stelsel

$$\begin{cases} 0 = \frac{\partial L}{\partial x} = -x(1 - 2\lambda), \\ 0 = \frac{\partial L}{\partial y} = y \left[\frac{1}{2} + 2\lambda(2y^2 - b) \right], \\ 0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^4 - by^2 - 1. \end{cases} \quad (12)$$

Uit de eerste vergelijking volgt dat ofwel $x = 0$ ofwel $\lambda = 1/2$. We behandelen deze gevallen apart.

$$x = 0$$

Voor $x = 0$ kunnen we de laatste vergelijking oplossen naar

$$y^2 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4}}{2}, \quad (13)$$

waarbij enkel het plusteken een reële oplossing geeft voor y . Invullen in de tweede vergelijking resulteert in $\lambda \neq 0$, dus deze lokale extrema ($y > 0$ en $y < 0$) liggen op de curve. Deze punten beschrijven positieve lokale maxima van de functie $f(x, y)$ en liggen op de y -as.

$$\lambda = 1/2$$

Voor $\lambda = 1/2$ wordt de tweede vergelijking

$$0 = \frac{y}{2} (4y^2 + 1 - 2b). \quad (14)$$

Dit heeft twee oplossingen voor y :

- Als $y = 0$, volgt uit de laatste vergelijking dat $x = \pm 1$. Bijgevolg zijn de twee punten $(1, 0)$ en $(-1, 0)$ op de x -as altijd lokale extrema met waarde $z = -1/2$.
- Als $y^2 = (2b - 1)/4 \neq 0$, volgt uit de laatste vergelijking dat

$$x^2 = 1 + \frac{b(2b - 1)}{4} - \left(\frac{2b - 1}{4}\right)^2. \quad (15)$$

Zowel x^2 als y^2 zijn positief als $b > 1/2$. Deze vier extrema liggen op geen van beide assen. Merk op dat voor deze extrema geldt dat

$$z = -\frac{1}{2} - \frac{(2b - 1)^2}{32} \leq -\frac{1}{2}. \quad (16)$$

. Hun z -waarde is dus kleiner dan die van $(1, 0)$ en $(-1, 0)$. Deze laatste twee punten zijn dus lokale maxima langsheen de curve als $b > 1/2$.

Conclusie

Aangezien de enige positieve extrema voorkomen in de punten

$$\left(0, \pm \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 + 4}}{2}}\right), \quad (17)$$

liggen de maxima altijd op de y -as. De minima liggen niet op de x -as als $b > 1/2$.

2 Oppervlak

2.1 Domein en bereik

$$f(x, y) = (\sqrt{a} - \sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

Je zou dan kunnen denken dat het domein daar is waar $x \geq 0$ en $y \geq 0$, waar dan ook een bereik van $[0, \infty[$ bij hoort.

Maar het gevraagde domein is: die $x \geq 0$ en $y \geq 0$ waarvoor $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{a}$. daar hoort als bereik bij $[0, a]$.

2.2 Raakvlak

vergelijking raakvlak is

$$z = (\sqrt{a} - \sqrt{x_0} - \sqrt{y_0})^2 + \frac{\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} - \sqrt{a}}{\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} - \sqrt{a}}{\sqrt{y_0}}(y - y_0)$$

2.3 Segmenten

snijpunt raakvlak met x -as, voor $y = 0 = z$ is $x = \sqrt{ax_0}$

snijpunt raakvlak met y -as, voor $x = 0 = z$ is $y = \sqrt{ay_0}$

snijpunt raakvlak met z -as, voor $x = 0 = y$ is $z = a - \sqrt{ax_0} - \sqrt{ay_0}$

Dus som van de drie segmenten is altijd a .

3 Ballon

3.1 Lokale richting

De lokale richting van de ballon in het punt $(2, 1)$ is gegeven door de negatieve gradiënt van $P(x, y)$ in dit punt:

$$-\nabla P(x, y) = -2x\mathbf{i} - y\mathbf{j} \quad (18)$$

Het beginpunt invullen geeft:

$$\nabla P(4, 1) = -8\mathbf{i} - 1\mathbf{j} \quad (19)$$

3.2 Traject

Omdat de curve overall evenwijdig is met de gradiënt geldt er:

$$\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} = \lambda \nabla P(x, y) \quad (20)$$

Hieruit vinden we:

$$\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{y} \quad (21)$$

Beide leden integreren geeft:

$$\frac{1}{2} \ln|x| = \ln|y| + \ln|C| \quad (22)$$

$$\sqrt{x} = Cy \quad (23)$$

Omdat we weten dat de curve door het beginpunt $(4, 1)$ gaat kunnen we C bepalen:

$$\sqrt{4} = C = 2 \quad (24)$$

Dus vinden we:

$$y = \frac{\sqrt{x}}{2} \quad (25)$$

met x positief om geen complexe resultaten te krijgen.

3.3 eindpunt

De ballon zal eindigen in een lokaal minimum van de luchtdruk functie. In dit minimum zal zowel $\frac{\partial P}{\partial x}$ als ook $\frac{\partial P}{\partial y}$ gelijk zijn aan nul. Het is makkelijk om na te gaan dat dit klopt voor het punt $(0, 0)$. Omdat deze functie convex is zal dit het enige minimum zijn. We kunnen ook bevestigen dat dit punt inderdaad op de curve ligt van het traject van de ballon.

4 Limiet

4.1 Methode 1

We gebruiken de Maclaurinreeksen voor de sinus en cosinus om de integraal te berekenen.

$$F(x) = \int_0^{3x^2} \sin(t^2) - \cos(t) dt \quad (26)$$

$$= \int_0^{3x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (t^2)^{2n+1} dt - \int_0^{3x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} dt \quad (27)$$

$$= \int_0^{3x^2} \left[t^2 - \frac{t^6}{3!} + \dots \right] dt - \int_0^{3x^2} \left[1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots \right] dt \quad (28)$$

$$= \left[\frac{t^3}{3} - t + \frac{t^3}{6} + \dots \right]_0^{3x^2} \quad (29)$$

$$= -3x^2 + \frac{27x^6}{2} + \dots \quad (30)$$

We vullen deze uitdrukking in de limiet in

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + F(x)}{9x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 3x^2 + \frac{27x^6}{2} + \dots}{9x^6} = \frac{3}{2} \quad (31)$$

4.2 Methode 2

De limiet is van de onbepaalde vorm $\left(\frac{0}{0}\right)$, aangezien $F(x) = \int_0^0 [\sin(t^2) - \cos(t)] dt = 0$. We passen de regel van l'Hôpital toe.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + F(x)}{9x^6} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + F'(x)}{54x^5}$$

met

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\int_0^{3x^2} [\sin(t^2) - \cos(t)] dt \right) \\
&= [\sin((3x^2)^2) - \cos(3x^2)] \frac{d3x^2}{dx} \\
&= 6x[\sin(9x^4) - \cos(3x^2)]
\end{aligned}$$

We vullen dit in en versimpelen.

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin(9x^4) - \cos(3x^2)}{9x^4}$$

Deze limiet is ook van de vorm $\left(\frac{0}{0}\right)$. We passen twee keer de regel van l'Hôpital toe.

$$\begin{aligned}
L &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{36x^3 \cos(9x^4) + 6x \sin(3x^2)}{36x^3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2 \cos(9x^4) + \sin(3x^2)}{6x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \\
&\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x(-36x^4 \sin(9x^4) + 2 \cos(9x^4) + \cos(3x^2))}{12x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-36x^4 \sin(9x^4) + 2 \cos(9x^4) + \cos(3x^2)}{2} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

In de laatste gelijkheid werkten we de limiet uit.

5 Maclaurinreeks

We gebruiken de goniometrische formules en de Maclaurinreeks voor de cosinus.

$$(1-x) \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1-x)(1+\cos(2x)) \quad (32)$$

$$= \frac{1}{2}(1-x) \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2x)^{2n}\right) \quad (33)$$

$$= \frac{1}{2}(1-x) \left(1 + 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^6 x^6}{6!} + \dots\right) \quad (34)$$

$$= \frac{1}{2}(1-x) \left(2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2x)^{2n+2}}{(2n+2)!}\right) \quad (35)$$

$$= 1 - x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n+1}}{(2n+2)!} [x^{2n+2} - x^{2n+3}] \quad (36)$$

Aangezien de Maclaurinreeks voor de cosinus convergeert voor alle $x \in \mathbb{R}$, is het gezochte convergentieinterval ook gans $\mathbb{R}$. Een andere oplossingsmethode is door de definitie van de Maclaurinreeks toe te passen, i.e. afgeleiden berekenen.