Calculus I, **26/10/2009**

Reeksnr.:
Naam:

1. Beschouw de differentiaalvergelijking $9y'' + 6y' + y = 0$.

   (a) Bepaal de algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking.

   (b) Bepaal de particuliere oplossing die voldoet aan de beginvoorwaarden $y(0) = 3$ en $y'(0) = 1$.

(2 ptn)

Antwoord:

(a) De karakteristieke vergelijking is: $9r^2 + 6r + 1 = 0$ of $(3r + 1)^2$=0.

Ze heeft dus een dubbele wortel, namelijk $r = -\frac{1}{3}$.

De algemene oplossing is dus: $y_A = Ae^{-(1/3)t} + Bte^{-(1/3)t}$.

(b) Met de eerste randvoorwaarde en y_A vinden we: $y(0) = A = 3$.

En aangezien $y'_A = -\frac{A}{3}e^{-(1/3)t} + Be^{-(1/3)t} - \frac{B}{3}te^{-(1/3)t}$,
vinden we met de tweede randvoorwaarde $y'(0) = 1 = -\frac{A}{3} + B$, zodat $B = 1 + \frac{A}{3} = 2$.

De gevraagde particuliere oplossing is dus $y_P = 3e^{-(1/3)t} + 2te^{-(1/3)t}$.

2. Beschouw de functie $f(x) = \cos(3 \arcsin x)$ op het gesloten interval $[-1, 1]$.

   (a) Toon aan dat
   $$\cos(3 \arcsin x) = \left(1 - 4x^2\right) \sqrt{1 - x^2}$$

   (b) Bereken vervolgens alle (lokale en globale) extrema. Leg daarbij bij elk punt uit hoe je komt tot een klassificatie als lokaal, dan wel globaal extremum.

   (c) Bereken de buigpunten.

(2 ptn)

Antwoord:

(a)

$$\begin{aligned}
\cos(3 \arcsin x) &= \cos(\arcsin x + 2 \arcsin x) \\
&= \cos(\arcsin x) \cos(2 \arcsin x) - \sin(\arcsin x) \sin(2 \arcsin x) \\
&= \cos(\arcsin x) \left[1 - 2\sin^2(\arcsin x)\right] - \sin(\arcsin x)\, 2 \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x) \\
&= \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} \left(1 - 2x^2 - 2x^2\right) \\
&= \sqrt{1 - x^2} \left(1 - 4x^2\right)
\end{aligned}$$

(b) Bereken de afgeleide van $f(x) = \sqrt{1 - x^2}\left(1 - 4x^2\right)$ en bekom

$$f'(x) = \frac{12x \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

De nulpunten van de afgeleide (kritieke punten) zijn $x = 0$ en $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. In de randpunten $x = \pm 1$ is de afgeleide niet gedefinieerd. Het tekenverloop van de afgeleide en het gedrag van de functie is dan samengevat als

	-1		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		0		$+\frac{\sqrt{3}}{2}$		1
f'	NG	-	0	+	0	-	0	+	NG
f	0	daalt	min. (-1)	stijgt	max. (+1)	daalt	min. (-1)	stijgt	0

We besluiten dat de randpunten $x = \pm 1$ lokale maxima zijn, dat er twee globale minima zijn, met name $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, en er is ook een globaal maximum voor $x = 0$.

(c) Bereken de tweede afgeleide en bekom

$$f''(x) = \frac{-24x^4 + 36x^2 - 9}{(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

De buigpunten komen overeen met de nulpunten van de teller, die een kwadratische vergelijking is in x^2. Bekom achtereenvolgens

$$x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{4}$$

en dus is

$$x = \pm\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{3}}{4}}$$

Echter, binnen het interval $[-1, 1]$ vinden we dus enkel als buigpunt de lokaties

$$x = \pm\sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{4}}$$

.